1. Gestão da Carteira

1.3.Teoria da Carteira

Maria Teresa Medeiros Garcia
ISEG, Universidade de Lisboa
2017-2018

Outline

1. Rendimento e risco de um activo

2. Rendimento e risco de uma carteira

3. Diversificação da carteira com dois activos com risco

4. O activo sem risco e o Teorema da Separação

5. Fronteira eficiente

6. A carteira óptima

1. Rendimento e risco de um activo

Em situação de risco, o resultado de uma qualquer acção (no sentido genérico e no sentido específico de um título) não é conhecido com certeza e, portanto, os resultados são habitualmente representados por uma **função de frequências**, isto é, uma listagem de todos os possíveis resultados conjuntamente com a probabilidade de ocorrência de cada um.

Rendimento e risco de um activo

Seja o seguinte exemplo de um investimento com três resultados possíveis para a taxa de rendimento:

Taxa de Rendimento	Probabilidade	Acontecimento
12%	1/3	1
9%	1/3	2
6%	1/3	3

Rendimento e risco de um activo

A informação relevante é dada por duas medidas:
1 - uma medida de localização - o valor esperado ou média, e
2 - uma medida de dispersão - a variância.

Com efeito, a taxa de rendimento da maior parte dos activos financeiros é uma variável aleatória

$$R_{it} = \frac{V_{it} - V_{i,t-1} + D_{it}}{V_{i,t-1}} \times 100,$$

Onde

R_{it} é a taxa de rendimento do activo financeiro *i* no momento *t*,

V_{it} é o valor ou preço do activo financeiro *i* no momento *t*,

$V_{it} - V_{i,t-1}$ é a mais ou menos valia (ganho ou perda de capital) e D_{it} é o dividendo distribuído em *t*.

A incerteza quanto a R_{it} provém de V_{it} e de D_{it}.

Rendimento e risco de um activo

O valor esperado da taxa de rendimento do activo *i* vem dado por

$$\bar{R}_i = E(R_{it}) = \sum_{t=1}^{M} P_{it} R_{it}$$

onde

M é o número de taxas de rendimento possíveis e

P_{it} é a probabilidade associada a cada taxa de rendimento concreta R_{it},

$t = 1, \ldots, M$

$$\sum_{t=1}^{M} P_{it} = 1$$

Rendimento e risco de um activo

Se $P_{it} = \frac{1}{M}$, isto é, caso as taxas de rendimento tenham igual probabilidade de realização, então tem-se

$$\bar{R}_i = \sum_{t=1}^{M} \frac{R_{it}}{M}$$

O valor esperado serve como medida da taxa de rendimento média de um investimento financeiro.

Rendimento e risco de um activo

A variância da taxa de rendimento do activo *i*, vem

$$\sigma_i^2 = \sum_{t=1}^{M} P_{it}\left[R_{it} - E(R_{it})\right]^2$$

Uma **variância baixa** indica que a maioria das taxas de rendimento estão concentradas perto de um valor médio.

Uma **variância alta** indica que a maioria das taxas de rendimento estão distantes do valor esperado, isto é, os valores extremos ocorrem frequentemente.

Rendimento e risco de um activo

Se $P_{it} = \frac{1}{M}$ então, a variância é dada por

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^{M} \left[R_{it} - E(R_{it}) \right]^2$$

Normalmente admite-se que as taxas de rendimento seguem uma **distribuição Normal**, isto é,

$$R_{it} \sim N(\bar{R}_i, \sigma_i^2)$$

Rendimento e risco de um activo

No exemplo dado temos:

$$\bar{R} = E(R_t) = \sum_{t=1}^{3} P_t R_t = \frac{1}{3}\times 12 + \frac{1}{3}\times 9 + \frac{1}{3}\times 6 = 9\%$$

e

$$Var(R_t) = \sum_{t=1}^{3} P_t (R_t - \bar{R})^2 = \frac{1}{3}(12-9)^2 + \frac{1}{3}(9-9)^2 + \frac{1}{3}(6-9)^2 = 3+0+3=6$$

Rendimento e risco de um activo

Conclusão:

- A decisão de investimento em activos financeiros, num contexto de incerteza, deve ser entendida como a intenção de obter uma determinada taxa de rendimento esperado, à qual está associada um determinado grau de risco.

- Assim, dados dois activos com taxas de rendimento esperado iguais, o investidor vai optar pelo activo de menor variância. Por outro lado, dados dois activos com variâncias iguais, o investidor vai optar por aquele que tem a maior taxa de rendimento esperada.

- No entanto, o conjunto de oportunidades ao dispor do investidor é bem maior do que apenas escolher, entre os activos disponíveis, o de maior taxa de rendimento ou o de menor variância: é possível considerar inúmeras combinações dos activos disponíveis (por exemplo, o investidor poderia investir parte da sua riqueza em cada um dos activos).

- O número de oportunidades ao dispor do investidor aumenta bastante, mas também a complexidade do problema.

- É nesse contexto que a razão de ser da **Teoria da Carteira**, inicialmente proposta e desenvolvida por **Markowitz (1952)**, se afigura como bastante pertinente: o risco de uma combinação de activos é muito diferente de uma simples média dos riscos dos activos individuais (em determinadas circunstâncias, a variância da combinação de dois activos pode ser inferior à variância de cada um dos activos individuais).

Conceito de covariância

- Covariância entre as taxas de rendimento de dois activos *i* e *j*, mede o grau de co-movimento das taxas de rendimento dos dois activos:

$$Cov(R_{it}, R_{jt}) = E\left[(R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)\right]$$

ou

$$Cov(R_{it}, R_{jt}) = \sigma_{ij} = \sum_{t=1}^{M} P_t (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)$$

Conceito de covariância

Quando todos os resultados conjuntos são igualmente prováveis, a covariância vem:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{M}\sum_{t=1}^{M}(R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)$$

- A covariância é **positiva** se, em média, as taxas de rendimento dos dois activos tendem a situar-se acima (ou abaixo) das respectivas médias ao mesmo tempo, isto é, tendem a mover-se na mesma direcção.
- A covariância é **negativa** se a taxa de rendimento de um activo tende a ficar abaixo da sua média, enquanto a taxa de rendimento do outro activo tende a situar-se acima da sua média, isto é, as taxas de rendimento dos dois activos variam em direcções opostas.

Coeficiente de correlação

Dividindo a covariância entre as taxas de rendimento pelo produto dos desvios padrões de cada uma das taxas de rendimento, obtém-se o coeficiente de correlação entre R_{it} e R_{jt},

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

$$\rho_{ij} \in [-1 \;\; 1]$$

Coeficiente de correlação

- ρ_{ij} = -1, diz-se que existe uma associação negativa e perfeita entre as variações das duas taxas de rendimento;

- ρ_{ij} = 0, diz-se que não existe qualquer associação entre as variações das taxas de rendimento dos dois activos, ou seja, os dois activos são independentes;

- ρ_{ij} = +1, diz-se que existe uma associação positiva e perfeita entre as variações das duas taxas de rendimento.

Market Condition	Return[a]				Rainfall	Return[a]
	Asset 1	Asset 2	Asset 3	Asset 5		Asset 4
Good	15	16	1	16	Plentiful	16
Average	9	10	10	10	Average	10
Poor	3	4	19	4	Poor	4
Mean return	9	10	10	10		10
Variance	24	24	54	24		24
Standard deviation	4.9	4.9	7.35	4.90		4.9

[a]The alternative returns on each asset are assumed equally likely and, thus, each has a probability of $\frac{1}{3}$.

Table 4-3 Returns on Various Investments[a]

Cálculos Table 4-3

Activo 1: $E(R_{1t}) = \bar{R}_1 = \sum_{t=1}^{3} P_t R_{1t} = \frac{1}{3}\times 15 + \frac{1}{3}\times 9 + \frac{1}{3}\times 3 = 9\%$
e

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{3}\sum_{t=1}^{3}(R_{1t} - \bar{R}_1)^2 = \frac{1}{3}\left[(15-9)^2 + (9-9)^2 + (3-9)^2\right] = \frac{1}{3}(36+36) = 24$$

.

Activo 2: $\bar{R}_2 = 10\%$ e $\sigma_2^2 = 24$.

Covariância entre os activos 1 e 2:

$$Cov(R_{1t};R_{2t}) = \sigma_{12} = \frac{1}{3}\sum_{t=1}^{3}(R_{1t} - \bar{R}_1)(R_{2t} - \bar{R}_2) = \frac{1}{3}\left[(15-9)(16-10) + (9-9)(10-10) + (3-9)(4-10)\right] = \frac{1}{3}(36+36) = 24$$

Coeficiente de correlação: $\rho_{12} = \frac{24}{\sqrt{24}\sqrt{24}} = 1$.

Notar que: .

$$R_{2t} = 1 + R_{1t}$$

Condition of Market	Deviations Security 1	Deviations Security 2	Product of Deviations	Deviations Security 1	Deviations Security 3	Product of Deviations
Good	(15 − 9)	(16 − 10)	36	(15 − 9)	(1 − 10)	−54
Average	(9 − 9)	(10 − 10)	0	(9 − 9)	(10 − 10)	0
Poor	(3 − 9)	(4 − 10)	36	(3 − 9)	(19 − 10)	−54
			72			−108

Table 4-6 Calculating Covariances

	1	2	3	4	5
1		24	−36	0	24
		(+1)	(−1)	(0)	(+1)
2			−36	0	24
			(−1)	(0)	(+1)
3				0	−36
				(0)	(−1)
4					0
					(0)
5					

Table 4-7 Covariance and Correlation Coefficients (in Brackets) Between Assets

2. Rendimento e risco de uma carteira

A taxa de rendimento esperada de uma carteira é a média ponderada das taxas de rendimento esperadas dos activos que a compõem:

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \bar{R}_i$$

onde

R_p é a taxa de rendimento da carteira p;

N é o número de activos/títulos que constituem a carteira;

R_i é a taxa de rendimento do activo *i* ; e

x_i é a fracção ou proporção do activo *i* na composição da carteira a verificar a condição $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$.

Rendimento e risco de uma carteira

x_i pode assumir qualquer valor dizendo-se que:

- se $x_i > 0$ então constitui-se uma posição longa no activo i;
- se $x_i = 0$ então não há aplicações no activo i;
- se $x_i < 0$ então constitui-se uma posição curta[1] no activo i.

[1] Entende-se por posição curta (*short-selling*) a operação de vender títulos de que não se é proprietário. É a designada operação a descoberto.

Rendimento e risco de uma carteira

A variância da taxa de rendimento da carteira vem a partir da definição $\sigma_p^2 = E(R_p - \bar{R}_p)^2$:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

ou

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

onde

- σ_i é o desvio padrão da taxa de rendimento do activo *i*;
- σ_j é o desvio padrão da taxa de rendimento do activo *j*;
- σ_{ij} é a covariância entre as taxas de rendimento dos activos *i* e *j*.

Rendimento e risco de uma carteira

Quando *i* = *j*, tem-se $\sigma_i \sigma_i = \sigma_i^2$, que representa a variância da taxa de rendimento do activo *i*, e portanto, é possível escrever a variância da carteira da seguinte forma:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} .$$

Pode afirmar-se que o risco da carteira depende de três factores:

- da proporção investida em cada activo;
- do risco de cada activo e
- da correlação entre as taxas de rendimento dos activos.

Rendimento e risco de uma carteira

Para N=2:

$$\bar{R}_p = E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2)$$

e

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_{12} + x_2^2 \sigma_2^2$$

Para N=3:

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_2 x_3 \sigma_2 \sigma_3 \rho_{23} + x_3^2 \sigma_3^2 + 2 x_1 x_3 \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13}$$

Rendimento e risco de uma carteira

Caso particular: todos os activos são independentes uns dos outros (covariância entre eles é nula: $\sigma_{ij} = 0$):

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2$$

a variância é igual à média ponderada das variâncias de cada um dos títulos que compõem a carteira.

Rendimento e risco de uma carteira

Se a proporção investida em cada activo é $\frac{1}{N}$ então a variância é dada por:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\sigma_i^2}{N}\right]$$

Constata-se que o que o termo entre parêntesis rectos não é mais do que a variância média das taxas de rendimento dos activos que compõem a carteira.

Pode, pois dizer-se que à medida que N aumenta, a variância da carteira diminui, tendendo, no limite, para zero.

Rendimento e risco de uma carteira

O caso geral com a proporção investida em cada activo igual a $\frac{1}{N}$ tem-se:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} (\frac{1}{N})^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (\frac{1}{N})(\frac{1}{N}) \sigma_{ij}$$

Ou

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N} (\frac{\sigma_i^2}{N}) \right] + (\frac{N-1}{N}) \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{\sigma_{ij}}{N(N-1)} \right]$$

onde ambos os termos entre parêntesis rectos são médias. O primeiro é a média das variâncias, enquanto que o segundo é a média das covariâncias (soma das covariâncias dividida pelo número de covariâncias, isto é, N*(N-1)).

Rendimento e risco de uma carteira

- Pode afirmar-se que a contribuição da variância individual das taxas de rendimento de cada activo, para a variância da carteira, tende para **zero** à medida que **N cresce**. Contudo, a contribuição do termo das covariâncias aproxima-se da covariância média à medida que N aumenta.
- Conclui-se assim que o risco individual dos títulos pode ser diversificado, mas a contribuição para o risco total do termo das covariâncias não pode ser diversificada.
- Fica assim claro o **efeito da diversificação no risco da carteira**. A variância mínima é obtida em carteiras muito grandes e é igual à covariância média das taxas de rendimento de todos os activos/títulos da carteira.

Month	IBM	Alcoa	GM	$\frac{1}{2}$ IBM + $\frac{1}{2}$ Alcoa	$\frac{1}{2}$ GM + $\frac{1}{2}$ Alcoa	$\frac{1}{2}$ GM + $\frac{1}{2}$ IBM
1	12.05	14.09	25.20	13.07	19.65	18.63
2	15.27	2.96	2.86	9.12	2.91	9.07
3	−4.12	7.19	5.45	1.54	6.32	0.67
4	1.57	24.39	4.56	12.98	14.48	3.07
5	3.16	0.06	3.72	1.61	1.89	3.44
6	−2.79	6.52	0.29	1.87	3.41	−1.25
7	−8.97	−8.75	5.38	−8.86	−1.69	−1.80
8	−1.18	2.82	−2.97	0.82	−0.08	−2.08
9	1.07	−13.97	1.52	−6.45	−6.23	1.30
10	12.75	−8.06	10.75	2.35	1.35	11.75
11	7.48	−0.70	3.79	3.39	1.55	5.64
12	−.94	8.80	1.32	3.93	5.06	0.19
$\bar{R}$	2.95	2.95	5.16	2.95	4.05	4.05
σ	7.15	10.06	6.83	6.32	6.69	6.02

Correlation Coefficient: IBM and Alcoa = 0.05;
GM and Alcoa = 0.22; IBM and GM = 0.48

Table 4-5 Monthly Returns on IBM, Alcoa, and GM (in percent)

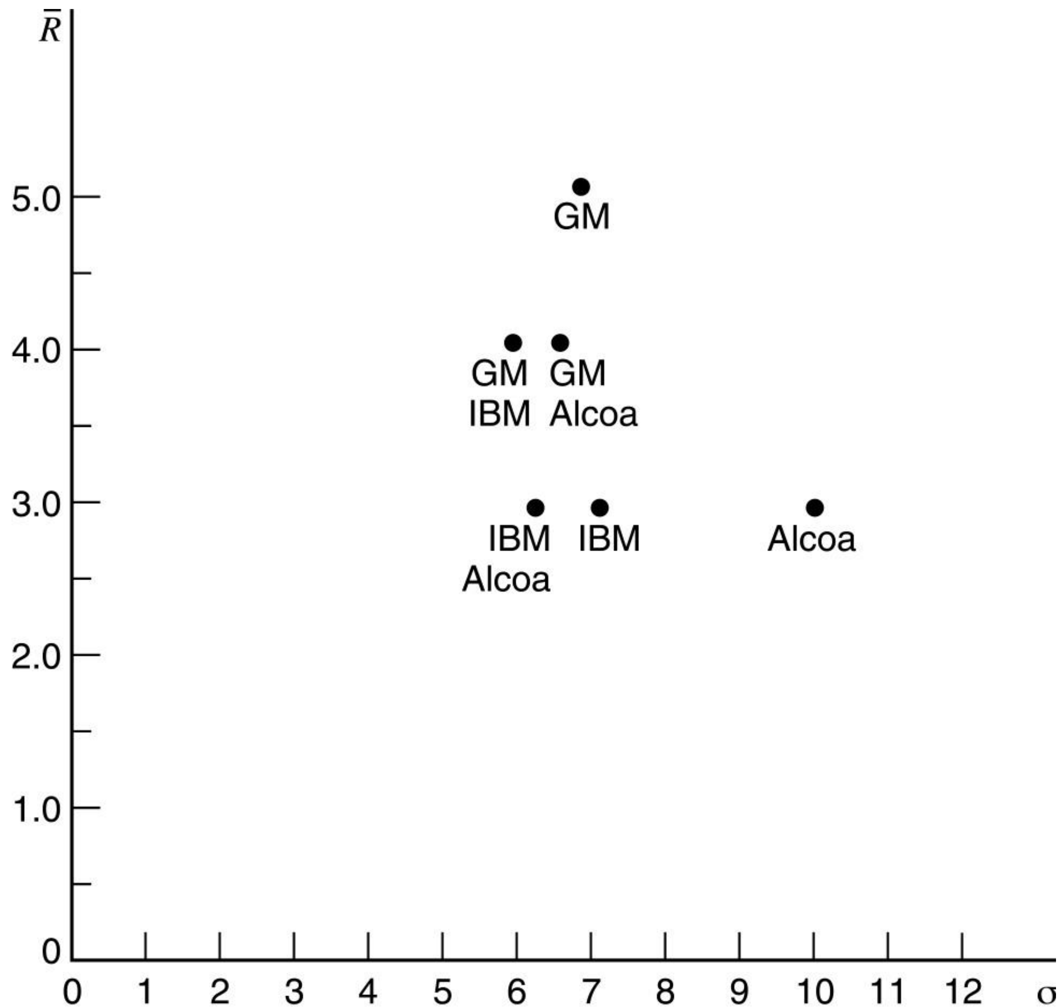


FIGURE 4-1 Securities and predetermined portfolios.

Number of Securities	Expected Portfolio Variance
1	46.619
2	26.839
4	16.948
6	13.651
8	12.003
10	11.014
12	10.354
14	9.883
16	9.530
18	9.256
20	9.036
25	8.640
30	8.376
35	8.188
40	8.047
45	7.937
50	7.849
75	7.585

(Table continues on next slide)

Table 4-8 Effect of Diversification

Number of Securities	Expected Portfolio Variance
100	7.453
125	7.374
150	7.321
175	7.284
200	7.255
250	7.216
300	7.190
350	7.171
400	7.157
450	7.146
500	7.137
600	7.124
700	7.114
800	7.107
900	7.102
1000	7.097
Infinity	7.058

Table 4-8 (continued)

United States	73
U.K.	65.5
France	67.3
Germany	56.2
Italy	60.0
Belgium	80.0
Switzerland	56.0
Netherlands	76.1
International stocks	89.3

Table 4-9 Percentage of the Risk on an Individual Security that Can Be Eliminated by Holding a Random Portfolio of Stocks within Selected National Markets and among National Markets [13]

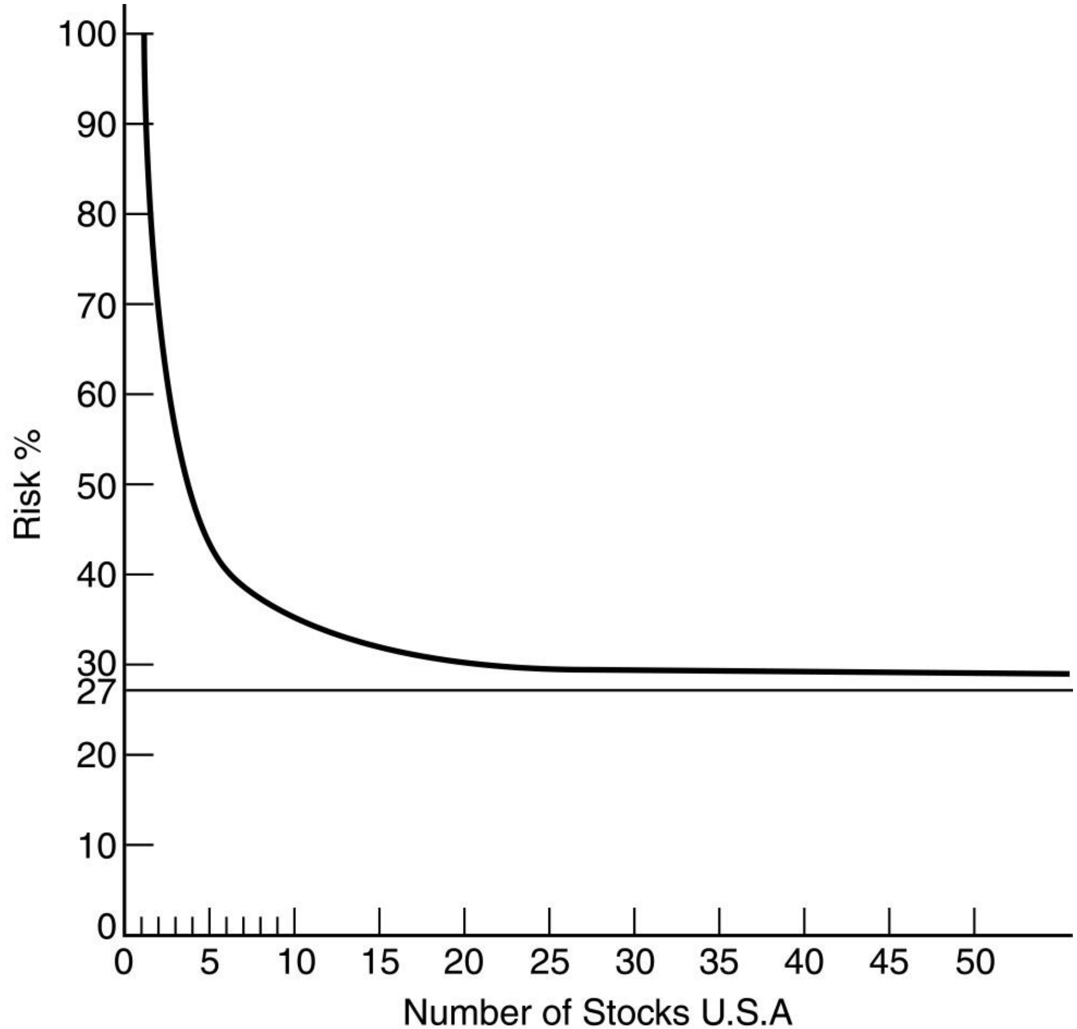


FIGURE 4-2 The effect of number of securities on risk of the portfolio in the United States[13].

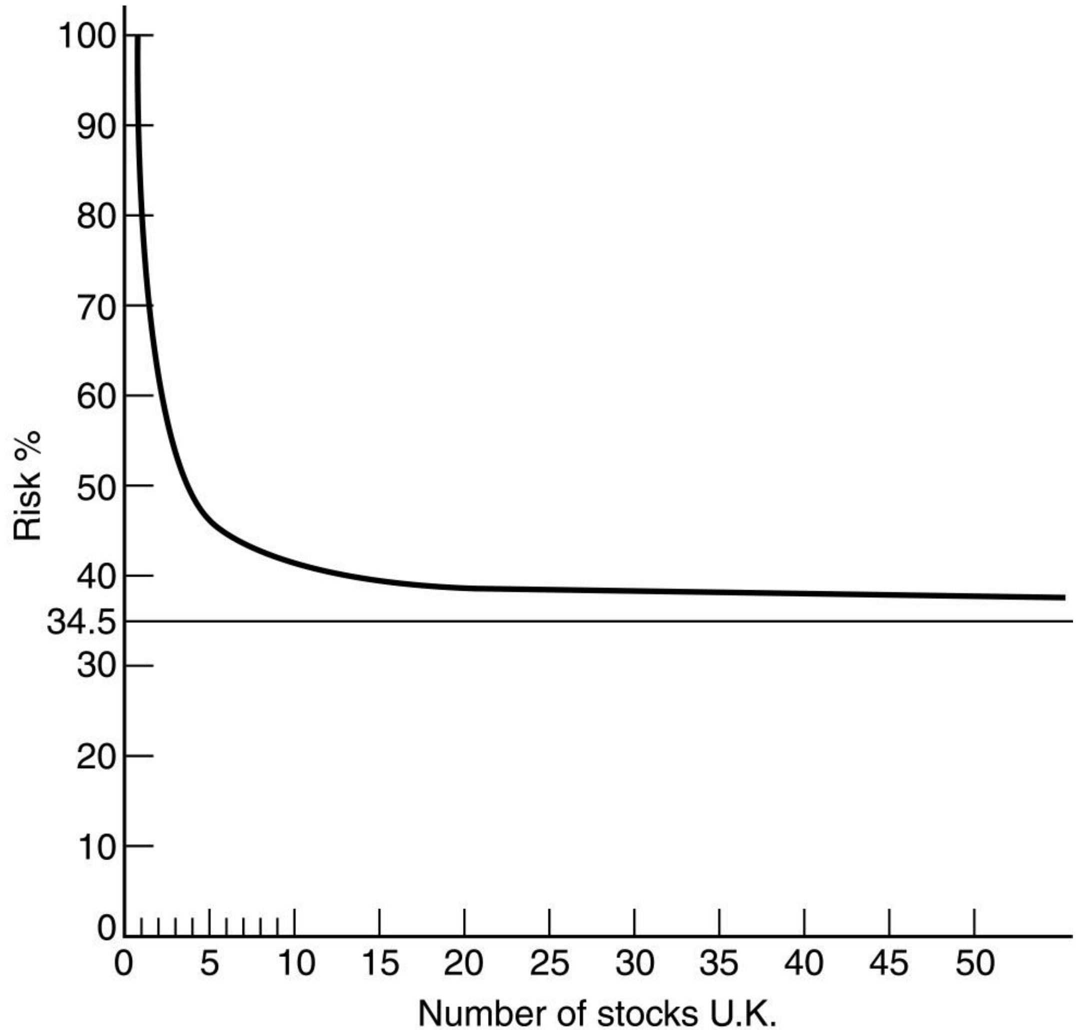


FIGURE 4-3 The effect of securities on risk in the U. K. [13].

Date	Standard Deviations: Bonds	Standard Deviations: Stocks	Correlation Coefficients
77–81	9.70%	14.54%	0.34
82–86	6.63%	14.66%	0.41
87–91	4.72%	15.40%	0.49
77–91	7.46%	14.87%	0.41

Table 4-10 Historical Data on Bonds and Stocks

Proportion Stocks	Proportion Bonds	Mean Return	Standard Deviation
1	0	12.5	14.90
0.9	0.1	11.85	13.63
0.8	0.2	11.2	12.38
0.7	0.3	10.55	11.15
0.6	0.4	9.9	9.95
0.5	0.5	9.25	8.80
0.4	0.6	8.6	7.70
0.3	0.7	7.95	6.69
0.2	0.8	7.3	5.82
0.1	0.9	6.65	5.16
0	1	6	4.80

Table 4-11 Mean Return and Standard Deviation for Combinations of Stocks and Bonds

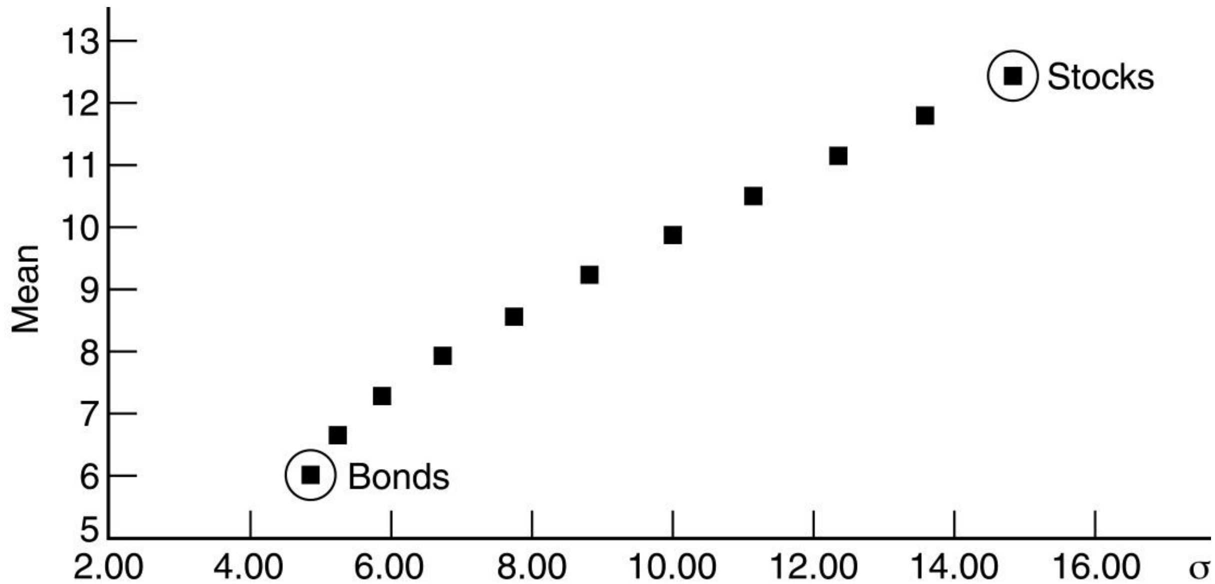


FIGURE 4-4 Combinations of bonds and stocks.

Proportion S&P	Proportion International	Mean Return	Standard Deviation
1	0	12.5	14.90
0.9	0.1	12.3	13.93
0.8	0.2	12.1	13.11
0.7	0.3	11.9	12.46
0.6	0.4	11.7	12.01
0.5	0.5	11.5	11.79
0.45	0.55	11.4	11.76
0.4	0.6	11.3	11.80
0.3	0.7	11.1	12.04
0.2	0.8	10.9	12.50
0.1	0.9	10.7	13.17
0	1	10.5	14.00

Table 4-12 Mean Return and Standard Deviation for Combinations of Domestic and International Stocks

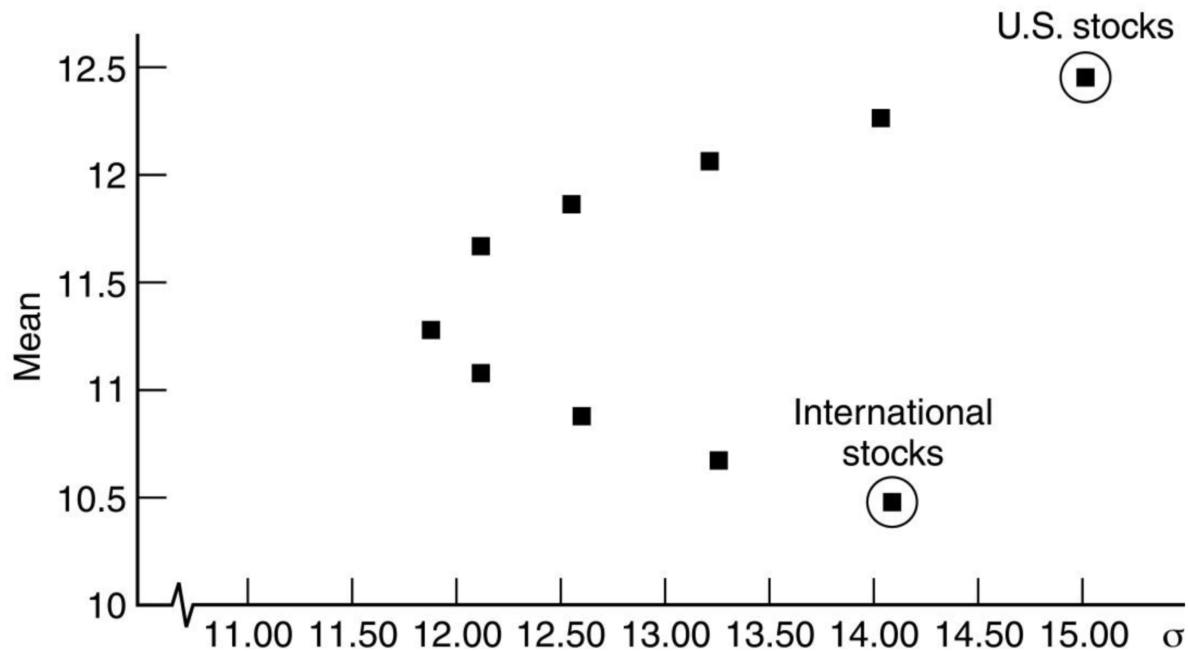


FIGURE 4-5 Combinations of U.S. stocks and international stocks.

Conjunto de Oportunidades de Investimento

Trata-se de todas as combinações lineares dos activos existentes, a partir do qual se determina o conjunto eficiente ou fronteira eficiente através da resolução do problema:

$$\begin{cases} Min\ \sigma_{\mathrm{p}}^{2} = x'Vx \\ s.\mathrm{a}\quad \overline{\mathrm{R}}_{p} = x'E \\ 1 = x'U \end{cases}$$

onde,

σ_p^2 - variância da carteira (escalar),

x - vector coluna dos coeficientes xi de ordem ($n \times 1$),

V - matriz das variâncias-covariâncias dos rendimentos dos activos, de ordem ($n \times n$), com a particularidade de V ser

- não-singular, $|V| \neq 0$, e
- simétrica, V = V´ ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$),

U - vector unitário, de ordem ($n \times 1$),

E - vector das taxas de rendimento, de ordem ($n \times 1$) e

$\overline{\mathrm{R}}_p$ - taxa de rendimento esperada da carteira (escalar).

3. Diversificação da carteira com **dois** activos com risco

O objectivo da diversificação de uma carteira de activos financeiros é combinar as aplicações nos diferentes activos que constituem a carteira de modo a reduzir o risco total da carteira e, simultaneamente, tentar sacrificar ao mínimo a rentabilidade da carteira.

Considere-se uma situação em que existem dois activos disponíveis, com taxas de rendimento esperadas $\bar{R}_2 > \bar{R}_1$ e com variâncias $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$.

Com base nestes dois activos vão ser abordados **vários casos** para o valor do coeficiente de correlação: $\rho_{12} = 1$; $\rho_{12} = -1$; $\rho_{12} = 0$ e $|\rho_{12}| < 1$.

Diversificação da carteira com dois activos com risco

Caso 1 ($\rho_{12} = 1$)

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2 + x_2^2\sigma_2^2 \Leftrightarrow \sigma_p^2 = \left(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2\right)^2$$

Resolvendo o sistema (eliminando x_1)

$$\begin{cases} E(R_p) = x_1E(R_1) + E(R_2) - x_1E(R_2) \\ \sigma_p = x_1\sigma_1 + (1 - x_1)\sigma_2 \end{cases}$$

Diversificação da carteira com dois activos com risco

O resultado obtido é uma equação do tipo

$$y = ax + b$$,

a qual pode ser facilmente representada no plano $(\sigma_p, E(R_p))$ atribuindo valores às duas variáveis.

$$E(R_p) = \frac{\sigma_p}{\sigma_1 - \sigma_2}\left[E(R_1) - E(R_2)\right] - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\left[E(R_1) - E(R_2)\right] + E(R_2)$$

Diversificação da carteira com dois activos com risco

A respectiva representação gráfica pode ser visualizada numa figura, a qual mostra o **lugar geométrico das oportunidades de investimento**, tendo em consideração os valores possíveis para o binómio rendimento-risco.

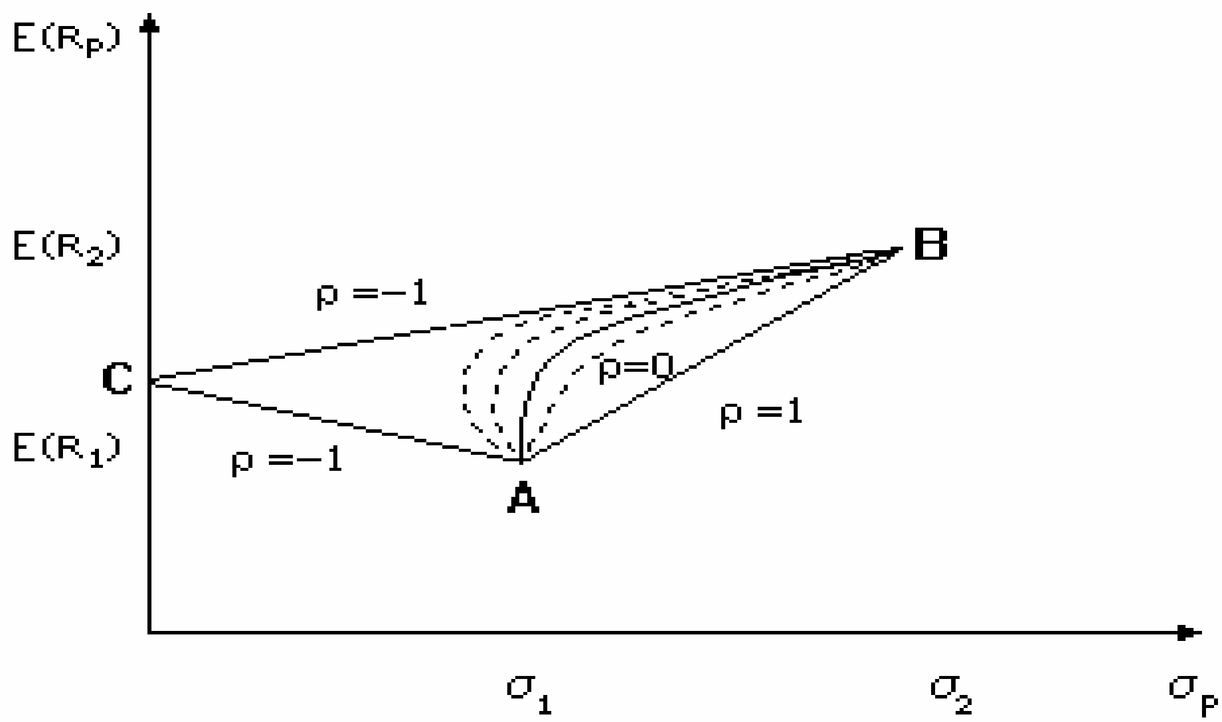
O **conjunto de oportunidades de investimento**, no caso em que existe uma correlação perfeita e positiva entre as rentabilidades dos dois activos, é dado pelo segmento de recta $\overline{AB}$.

Note-se que, neste caso, não existe possibilidade do investidor diminuir o seu risco sem abdicar de parte do rendimento esperado. Ou seja, a diversificação da carteira não pode ser utilizada para diminuir o risco sem diminuir também a taxa de rendimento esperada.

A carteira de menor risco consiste somente no investimento de menor risco, neste caso no activo 1, a qual dá também origem a menores taxas de rendimento esperadas.

Diversificação da carteira com dois activos com risco

Figura - Lugar geométrico das oportunidades de investimento



X_C	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
$\bar{R}_P$	8.0	9.2	10.4	11	11.6	12.8	14.0
σ_P	3.0	3.6	4.2	4.5	4.8	5.4	6.0

Table 5-1 The expected Return and Standard Deviation of a Portfolio of Colonel Motors and Separated Edison When r = +1

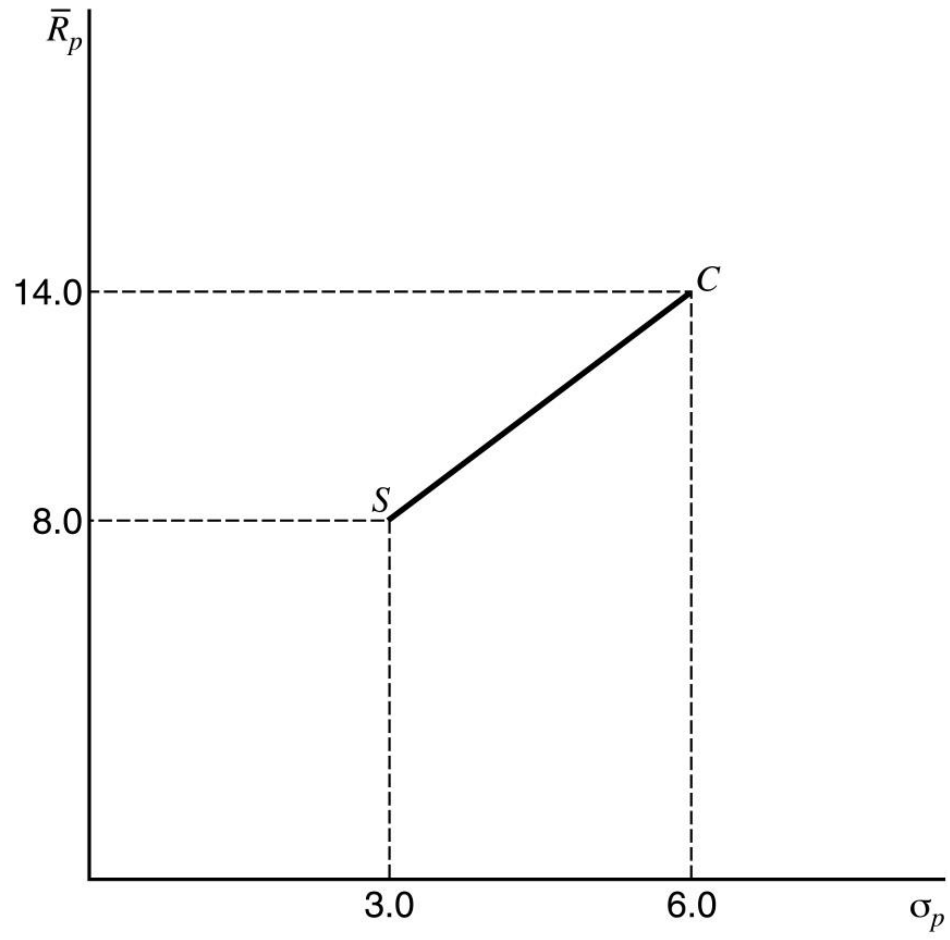


FIGURE 5-1 Relationship between expected return and standard deviation when $r = +1$.

Diversificação da carteira com dois activos com risco

Caso 2 ($\rho_{12} = -1$)

Neste caso, obtêm-se dois ramos para o risco da carteira, a partir da expressão da variância,

$$\sigma_p^2 = (x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2)^2$$

e

$$\sigma_p^2 = (-x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2)^2$$

Diversificação da carteira com dois activos com risco

Tem-se agora dois sistemas:

$$\begin{cases} E(R_p) = x_1 E(R_1) + (1 - x_1) E(R_2) \\ \sigma_p = x_1 \sigma_1 - (1 - x_1) \sigma_2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} E(R_p) = x_1 E(R_1) + (1 - x_1) E(R_2) \\ \sigma_p = -x_1 \sigma_1 + (1 - x_1) \sigma_2 \end{cases}$$

Diversificação da carteira com dois activos com risco

Temos duas soluções alternativas para o conjunto de oportunidades de investimento,

$$E(R_p) = \frac{\sigma_p}{\sigma_1 + \sigma_2}\left[E(R_1) - E(R_2)\right] + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\left[E(R_1) - E(R_2)\right] + E(R_2)$$

,

$$E(R_p) = -\frac{\sigma_p}{\sigma_1 + \sigma_2}\left[E(R_1) - E(R_2)\right] + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\left[E(R_1) - E(R_2)\right] + E(R_2)$$

As soluções obtidas são novamente equações do tipo $y = ax + b$.

Diversificação da carteira com dois activos com risco

O primeiro ramo da solução, apresenta um declive positivo e é representado pelo segmento de recta $\overline{CB}$ na figura.

O segundo ramo da solução, tem um declive negativo e é representado pelo segmento $\overline{CA}$ na figura.

Neste caso é possível obter uma carteira com risco nulo, $\sigma_p = 0$, sem a necessidade de vendas a descoberto, tendo-se então

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

o que representa o ponto C na figura, ou seja, a proporção a deter de cada activo depende directamente do risco do outro activo.

Isto significa que quanto mais risco tiver um activo mais se deve deter do outro activo.

Diversificação da carteira com dois activos com risco

Demonstra-se, por outro lado, que embora um activo possa ter um risco elevado, a carteira preferencial deve, mesmo assim, conter esse activo:a carteira representada pelo ponto C tem risco nulo e proporciona uma taxa de rendimento maior que a do activo 1, pois contém dois activos.

A diversificação de investimentos, neste caso, permite ao investidor diminuir o risco e deslocar-se para a esquerda no plano rendimento-risco, sem necessariamente sofrer uma redução da taxa de rendimento esperada.

O investidor pode evitar o risco, recorrendo à diversificação e, neste caso concreto, construir uma carteira sem risco a partir de posições longas em dois activos com risco.

X_C	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\bar{R}_P$	8.0	9.2	10.4	11.6	12.8	14.0
σ_P	3.0	1.2	0.6	2.4	4.2	6.0

Table 5-2 The expected Return and Standard Deviation of a Portfolio of Colonel Motors and Separated Edison When r = –1

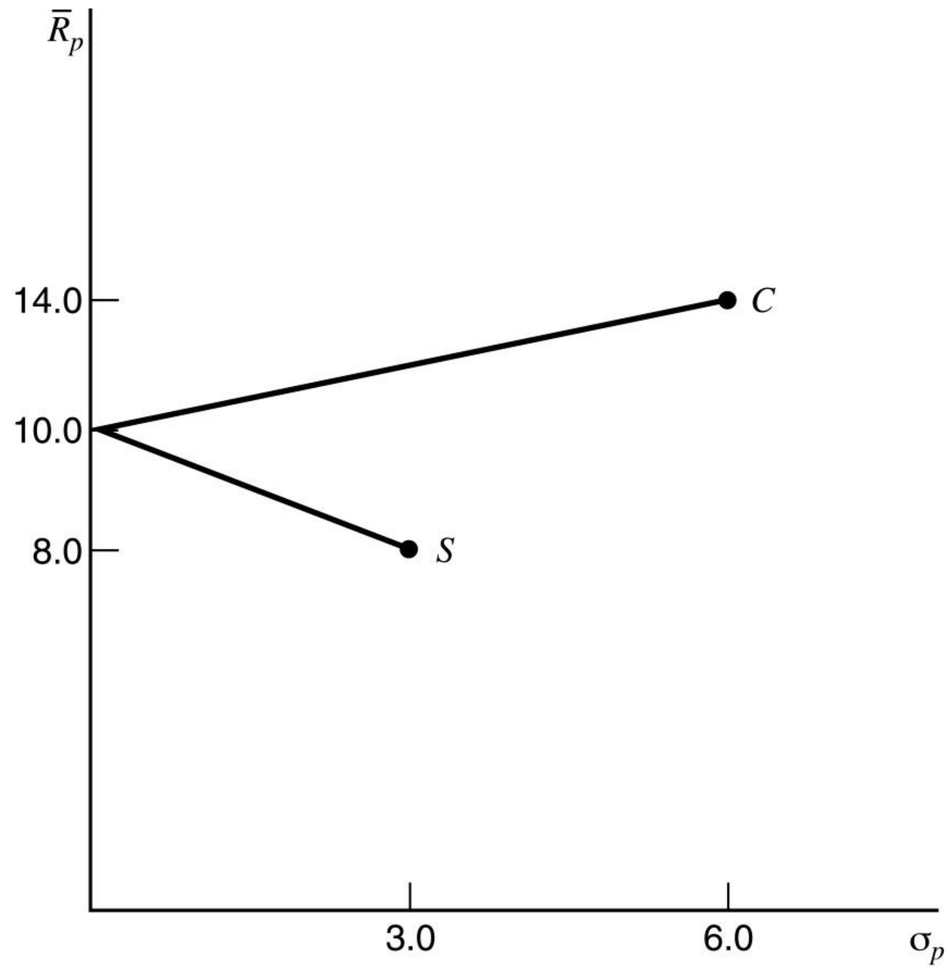


FIGURE 5-2 Relationship between expected return and standard deviation when r = –1

Diversificação da carteira com dois activos com risco

Caso 3 ($\rho_{12} = 0$)

Neste caso o sistema a resolver vem:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{E(R_p) - E(R_2)}{E(R_1) - E(R_2)} \\ \sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + (1 - 2x_1 + x_1^2)\sigma_2^2 \end{cases}$$

Diversificação da carteira com dois activos com risco

A expressão que se obtém representa a equação de uma hipérbole no plano $(\sigma_p, E(R_p))$ situada no interior do triângulo ABC. [1]

$$\sigma_p^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\left[E(R_1) - E(R_2)\right]^2}\left[E(R_p)\right]^2 - 2\frac{\sigma_2^2}{E(R_1) - E(R_2)}E(R_p) + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\left[E(R_1) - E(R_2)\right]^2}\left[E(R_2)\right]^2$$

$$-2\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\left[E(R_1) - E(R_2)\right]^2}E(R_p)E(R_2) + 2\frac{\sigma_2^2}{E(R_1) - E(R_2)}E(R_2) + \sigma_2^2$$

[1] Note-se que no plano $(\sigma_p^2, E(R_p))$ a expressão representa a equação de uma parábola.

Diversificação da carteira com dois activos com risco

Para determinar a carteira com risco mínimo é necessário obter $\frac{d\sigma_p}{dx_1} = 0$, ou seja,

$$\frac{d\sigma_p}{dx_1} = \frac{1}{2}\left[x_1^2\sigma_1^2 + (1-x_1)^2\sigma_2^2\right]^{-1/2}\left[2x_1\sigma_1^2 - 2(1-x_1)\sigma_2^2\right] = 0$$

A composição da **carteira de risco mínimo**, quando o coeficiente de correlação é nulo, é dada por

$$x_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

X_C	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\bar{R}_P$	8.0	9.2	10.4	11.6	12.8	14.0
σ_P	3.00	2.68	3.00	3.79	4.84	6.0

Table 5-3 The Expected Return and Standard Deviation for a Portfolio of Colonel Motors and Separated Edison with r = 0

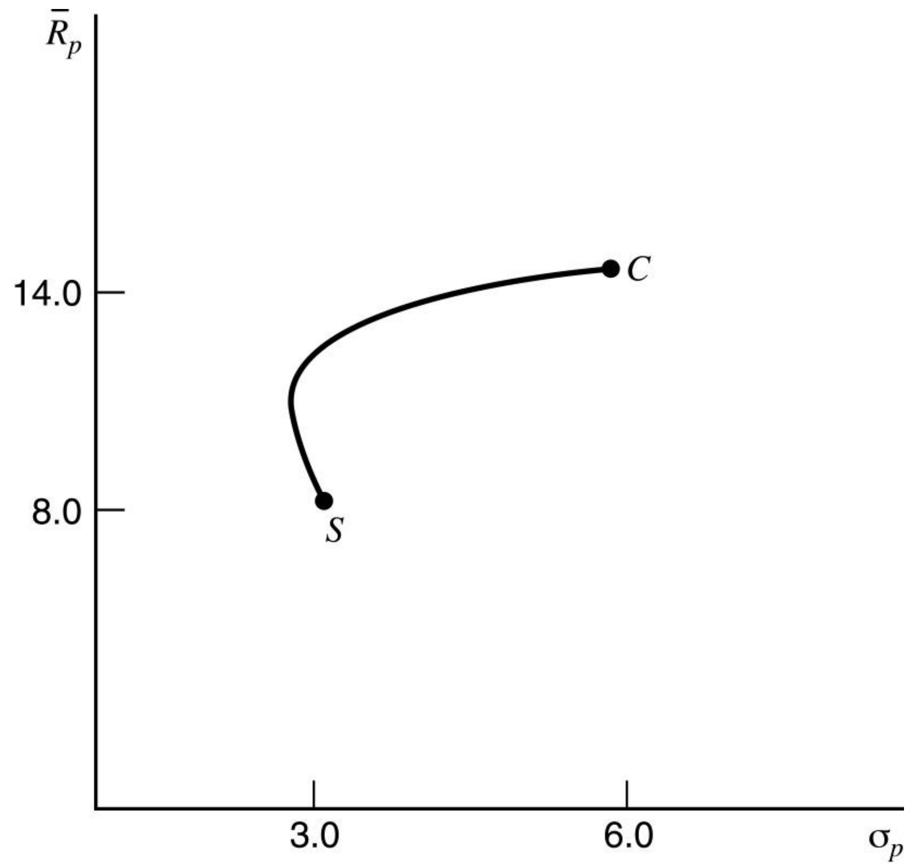


Figure 5-4 Relationship between expected return and standard deviation when r = 0.

Diversificação da carteira com dois activos com risco

Caso 4 ($|\rho_{12}| < 1$)

Na prática, é pouco provável que qualquer par de activos financeiros tenha taxas de rendimento perfeitamente correlacionadas (negativa ou positivamente).

Casos de correlação imperfeita produzem pontos possíveis de risco e rendimento que estão situados em hipérboles a tracejado na figura, entre os dois casos extremos.

- Quanto mais **negativa** for a correlação entre as duas taxas de rendimento, tanto mais a hipérbole estará situada perto da linha quebrada ACB. Quanto mais **positiva** for a correlação, tanto mais a hipérbole estará perto do segmento de recta .
- Repare-se, por outro lado, que a curva de oportunidades de investimento é côncava acima de carteira de variância mínima e é convexa abaixo da carteira de variância mínima.

X_C	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\bar{R}_P$	8.0	9.2	10.4	11.6	12.8	14.0
σ_P	3.00	3.17	3.65	4.33	5.13	6.00

Table 5-4 The expected Return and Standard Deviation of a Portfolio of Colonel Motors and Separated Edison When r = 0.5

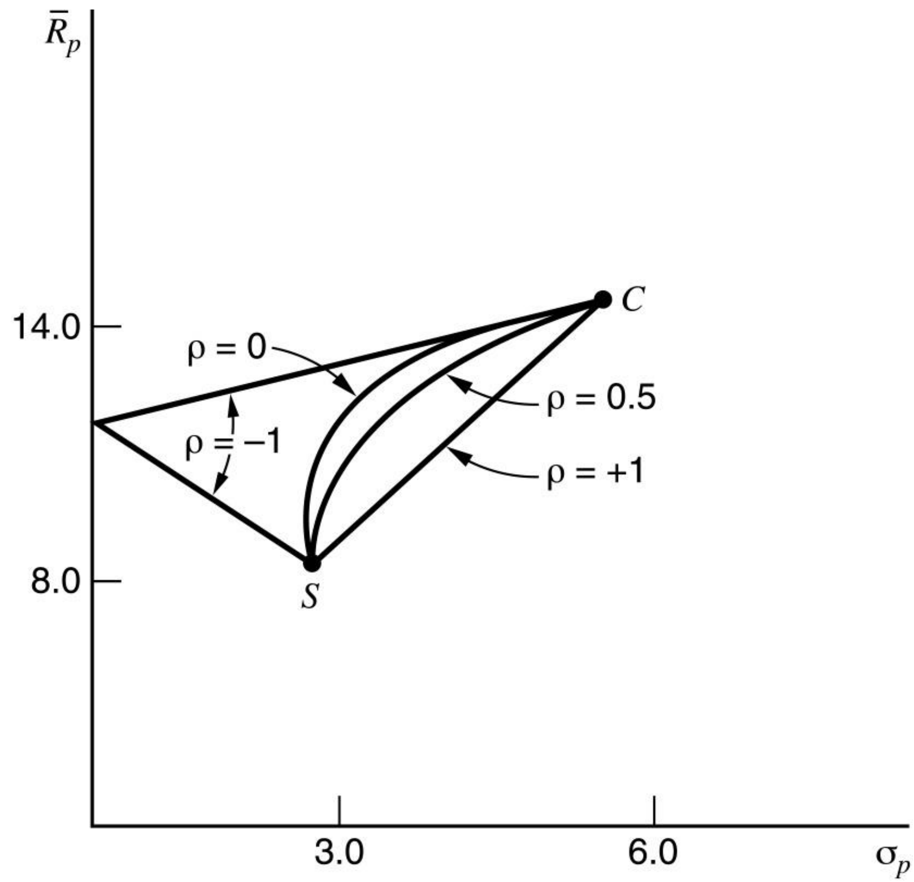


FIGURE 5-5 Relationship between expected return and standard deviation of return for various correlation coefficients.

Composição da carteira de risco mínimo – caso geral

Já sabemos que para determinar a carteira com risco mínimo é necessário obter $\frac{d\sigma_p}{dx_1}=0$, ou seja,

$$\frac{d\sigma_p}{dx_1}=\frac{1}{2}\left[x_1^2\sigma_1^2+(1-x_1)^2\sigma_2^2+2x_1(1-x_1)\sigma_{12}\right]^{-1/2}\left[2x_1\sigma_1^2-2(1-x_1)\sigma_2^2+2\sigma_{12}-4x_1\sigma_{12}\right]=0$$

A composição da **carteira de risco mínimo** é dada por

$$x_1=\frac{\sigma_2^2-\sigma_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}\ .$$

4. O activo sem risco e Teorema da Separação

Admita-se, por hipótese, que o activo 2 não tem risco: $\begin{cases} E(R_2) = R_f \\ \sigma_2 = 0 = \sigma_f \end{cases}$.

(o activo 2 é um activo de rendimento certo, por exemplo, uma conta poupança ou um Título do Tesouro)

Resolve-se o sistema seguinte para obter o conjunto de oportunidades de investimento: $\begin{cases} E(R_p) = x_1 E(R_1) + (1 - x_1) E(R_2) \\ x_1 = \dfrac{\sigma_p}{\sigma_1} \end{cases}$

O activo sem risco e Teorema da Separação

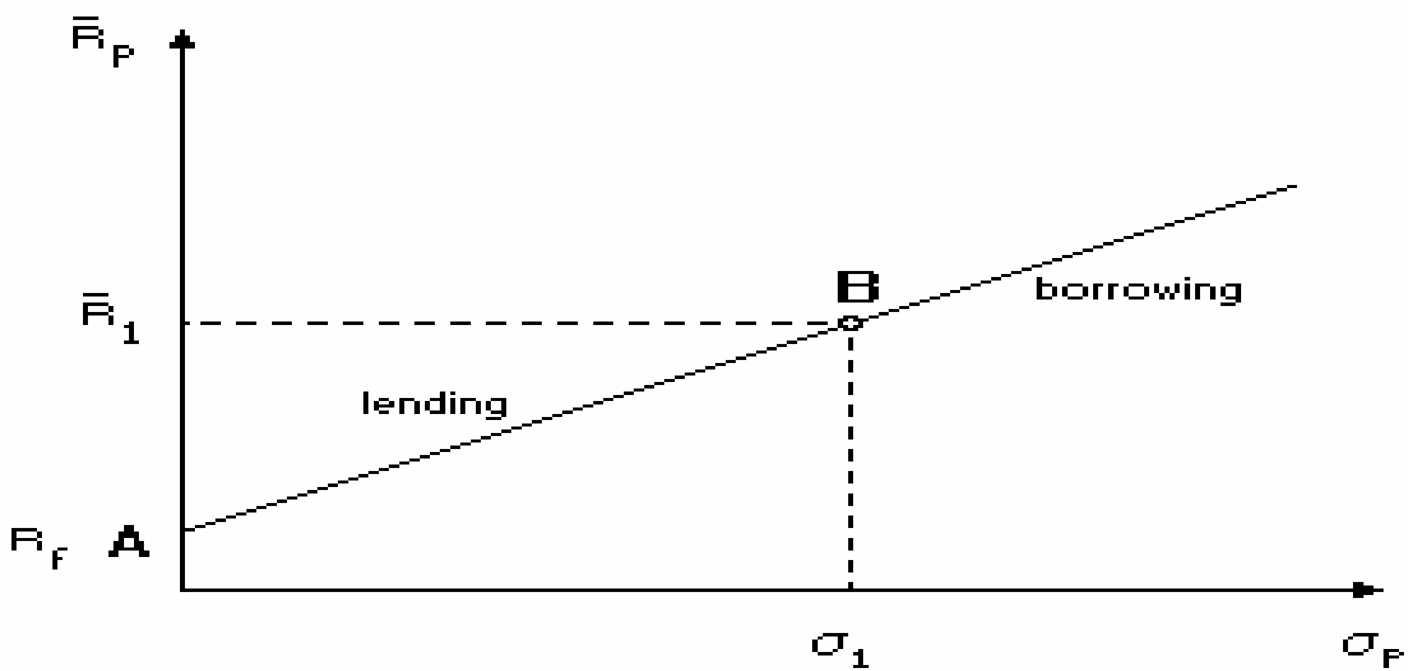
Trata-se de uma recta que passa pelo ponto $(0, R_f)$ e tem declive $\frac{E(R_1) - R_f}{\sigma_1}$:

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_1) - R_f}{\sigma_1} \sigma_p$$

Constata-se que quando um dos investimentos tem uma taxa de rendimento certa, considerando adicionalmente um segundo activo com risco, a expressão analítica para o conjunto de oportunidades de investimento é linear. A figura seguinte ilustra precisamente esta situação.

O activo sem risco e Teorema da Separação

Figura - Lugar geométrico das oportunidades de investimento quando se introduz o activo sem risco



O activo sem risco e Teorema da Separação

Para qualquer ponto entre A e B, está a investir-se positivamente em ambos os activos. Neste caso diz-se que o investidor está a emprestar ao comprar o activo sem risco (*lending*).

Posições à direita do ponto B significam que o investidor está a pedir emprestado, pois endivida-se no activo sem risco com vista a angariar fundos para investir no activo 1 (borrowing).

Carteira eficiente

Para que uma carteira seja eficiente não pode existir outra carteira com:

- a mesma taxa de rendimento e menor risco;
- o mesmo risco e uma taxa de rendimento superior;
- menos risco e uma taxa de rendimento mais elevada.

Quando uma carteira é eficiente é impossível obter uma maior taxa de rendimento sem incorrer num risco adicional.

Carteira eficiente

- No caso de correlação negativa perfeita, o segmento $\overline{CB}$ contém os pontos que representam carteiras eficientes. Claramente, todas as carteiras situadas em $\overline{AC}$ são ineficientes uma vez que há carteiras no segmento $\overline{CB}$ que têm o mesmo risco mas taxas de rendimento esperado mais elevadas.
- No caso de correlação positiva perfeita todas as carteiras posicionadas no segmento $\overline{AB}$ são eficientes.
- Pode então definir-se a **fronteira eficiente** como o lugar geométrico de todas as carteiras eficientes.

Teorema da Separação

A introdução de um activo sem risco foi estudada por Tobin, no contexto do **Teorema da Separação**, que teve o seu nome: caso exista um activo sem risco, o investidor racional distribui o seu investimento por dois activos: o activo sem risco e um segundo activo denominado **carteira de mercado**.

Esta última carteira, na prática um activo compósito, deverá incluir todos os activos com risco existentes na economia.

Assim, considerando o activo 1 (com risco) como sendo a carteira de mercado obtém-se o conjunto de oportunidades de investimento quando existe um activo sem risco e a carteira de mercado:

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m} \sigma_p$$

onde o subscrito *m* identifica a carteira de mercado.

Esta equação é a denominada **Recta** (ou Linha) do **Mercado de Capitais (Capital Market Line)**.

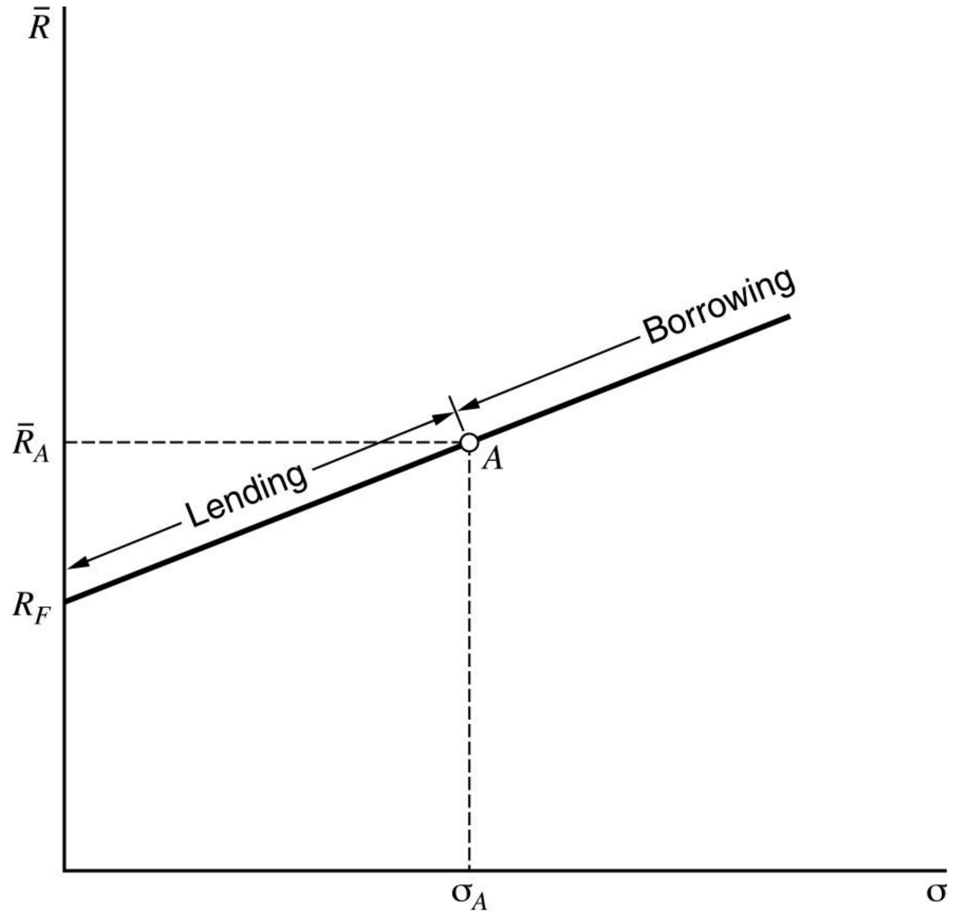


FIGURE 5-13 Expected return and risk when the risk-free rate is mixed with portfolio A.

5. Fronteira eficiente

Hipóteses:

1: Existem N activos na economia;

2: As carteiras possíveis na economia podem ser constituídas por um activo, dois activos, até combinações de N activos;

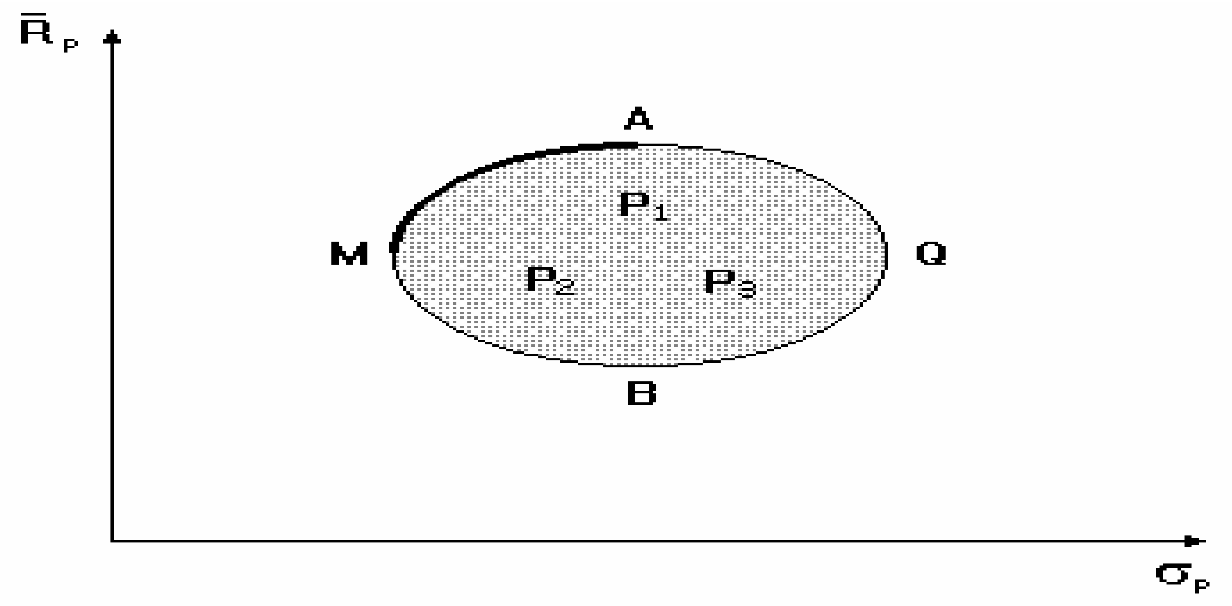
3: Os activos pertencentes à carteira estão correlacionados positivamente, i.e., $0 < \rho_{ij} < 1, \ \forall ij$.

Pode pensar-se nas combinações de activos como combinações entre a carteira de variância mínima e um qualquer outro activo.

O conjunto de oportunidades de investimento na economia vem dado pela área [MAQB] na figura seguinte, o qual representa todas as carteiras possíveis de constituir na economia: assume pois uma forma convexa porque as carteiras que representa contêm activos imperfeitamente correlacionados.

Fronteira eficiente

Figura - Conjunto de oportunidades de investimento na economia



Conjunto de Variância Mínima

O conjunto de variância mínima (CVM) representa, para qualquer nível de rendimento, as carteiras com a menor variância, conjunto que na figura é representado pela linha $\overline{BMA}$. De facto, apenas estas carteiras são relevantes para investigar. Carteiras no interior do conjunto de oportunidades de investimento tais como as carteiras P_1, P_2 e P_3 são dominadas por outras e portanto são ineficientes.

Uma propriedade importante do conjunto de variância mínima é a seguinte: quando se combinam duas ou mais carteiras pertencentes ao CVM, a carteira resultante também pertence ao CVM.

Fronteira Eficiente

O conjunto de carteiras eficientes é o conjunto de carteiras que fazendo parte do CVM não contém carteiras ineficientes.

A fronteira eficiente (FE) corresponde ao lugar geométrico das carteiras eficientes.

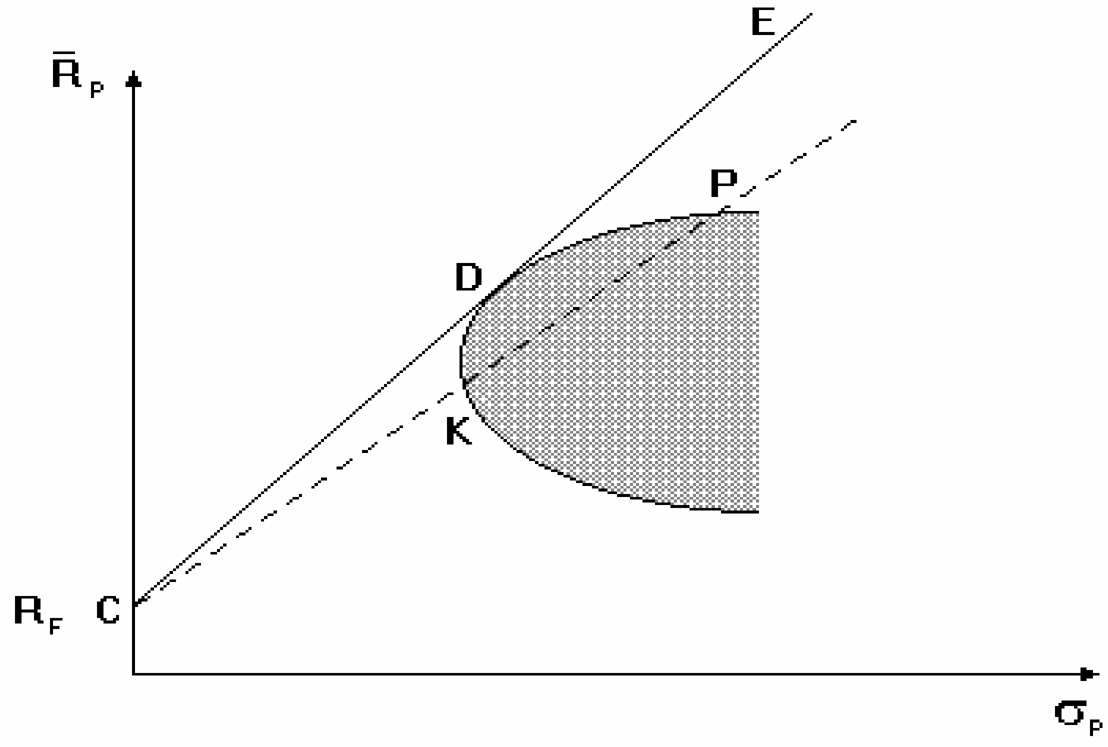
Como a FE está contida no CVM, também verifica a propriedade do CVM que se mencionou atrás: uma combinação de duas ou mais carteiras pertencentes à FE, tem como resultado uma carteira também pertence à FE.

A FE é uma função côncava no plano $(\sigma_p, \overline{R}_p)$, que se estende da carteira de variância mínima até à carteira de taxa de rendimento esperada máxima.

Fronteira Eficiente

Caso particular: o activo sem risco é combinado com os outros activos com risco da economia

Figura – Fronteira eficiente com um activo sem risco



Fronteira Eficiente

Se o activo sem risco é combinado com a carteira com risco K isso resulta num conjunto de oportunidades de investimento linear, dado pelo segmento de recta $\overline{CKP}$.

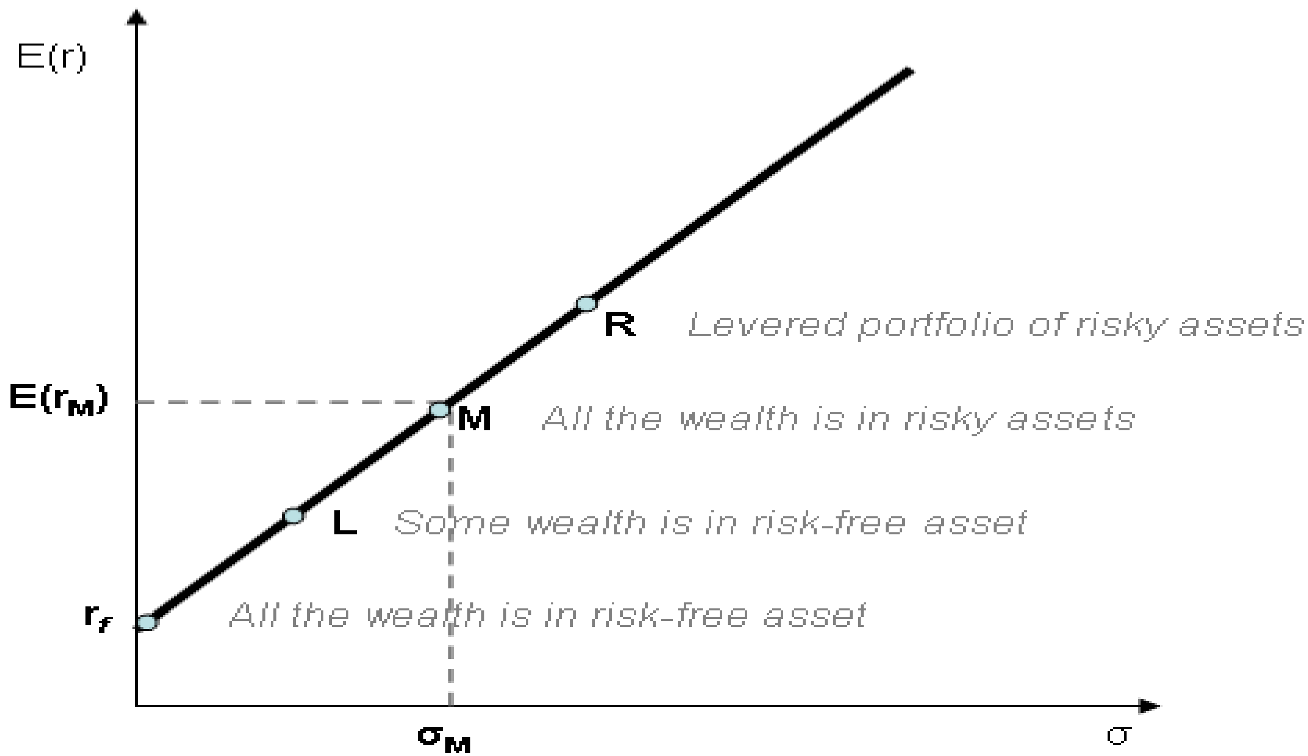
Quando o activo sem risco é combinado com a carteira D isso gera o conjunto de oportunidades de investimento linear, dado pelo segmento de recta $\overline{CDE}$.

No entanto, este último conjunto domina claramente o conjunto $\overline{CKP}$, porque cada carteira de $\overline{CDE}$ tem uma taxa de rendimento esperada maior para o mesmo nível de risco do que as carteiras situadas em $\overline{CKP}$.

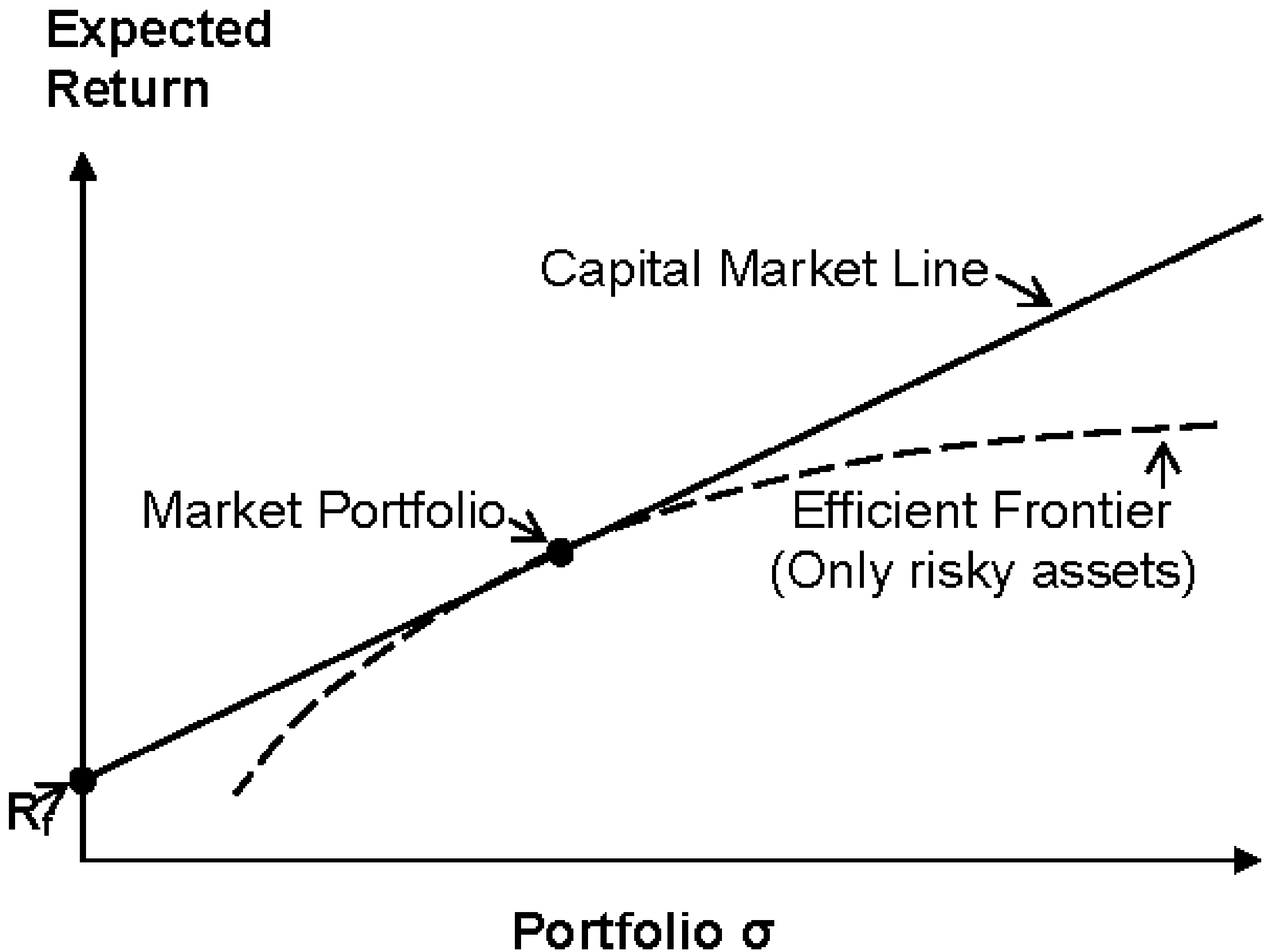
A carteira D é a carteira situada no ponto de tangência entre o segmento de recta e o conjunto convexo de carteiras compostas por activos com risco a sombreado.

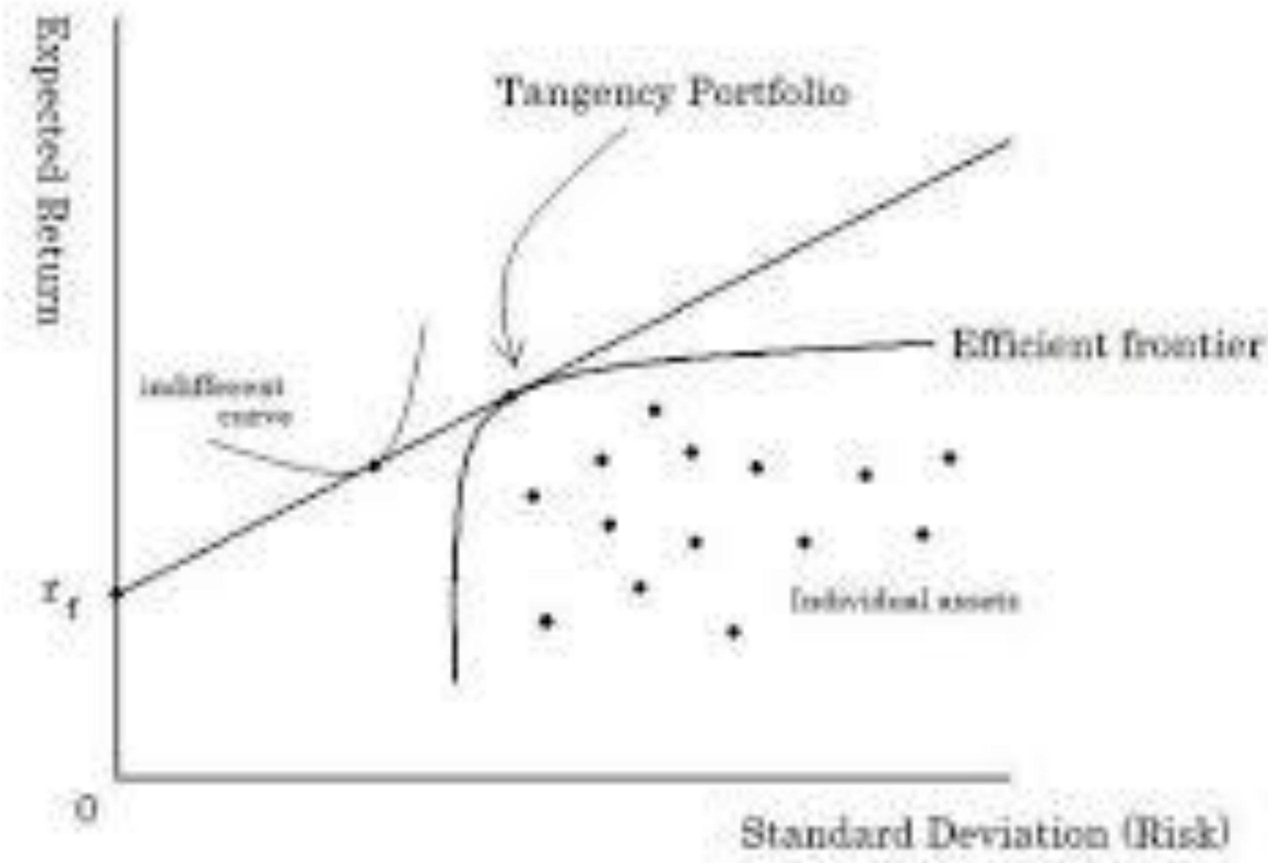
O conjunto de carteiras eficientes $\overline{CDE}$ linear é pois a Recta do Mercado de Capitais, com as carteiras ao longo da linha a serem obtidas, emprestando, e pedindo emprestado, à taxa de juro sem risco no mercado de capitais. A carteira D é também designada por **carteira de mercado**.

Capital market line (CML) is the tangent **line** drawn from the point of the risk-free asset to the feasible region for risky assets.



Fonte: Wikipedia, the free encyclopedia


Expected
Return
Capital Market Line
Market Portfolio
Efficient Frontier
(Only risky assets)
R_f
Portfolio σ


Expected Return
Tangency Portfolio
Efficient frontier
r_f
0
Standard Deviation (Risk)

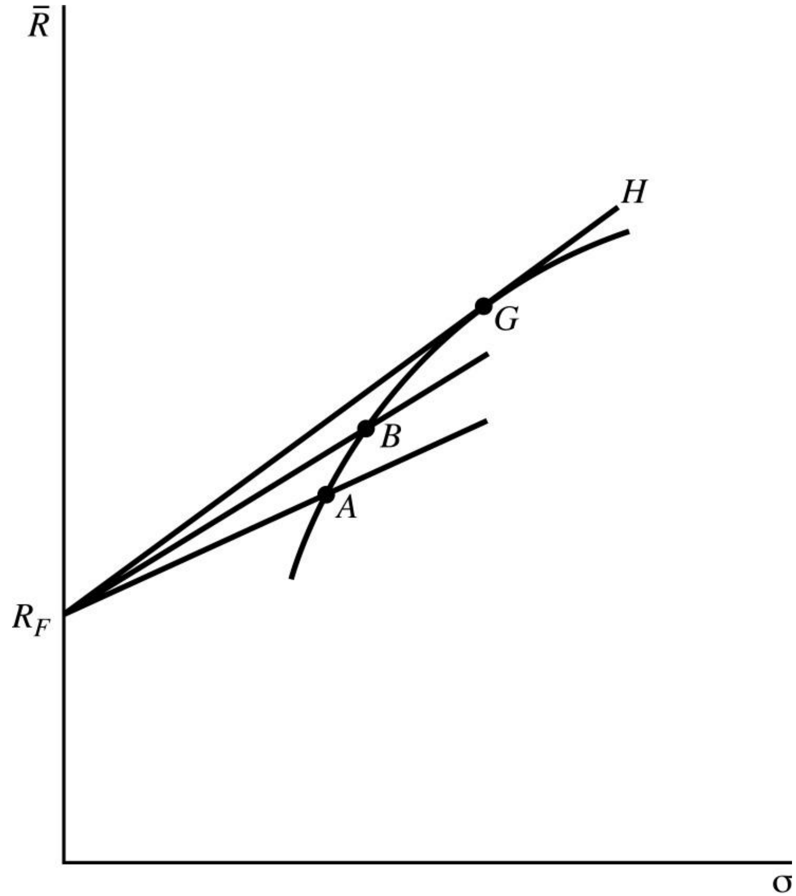


FIGURE 5-14 Combinations of the riskless asset and various risky portfolios.

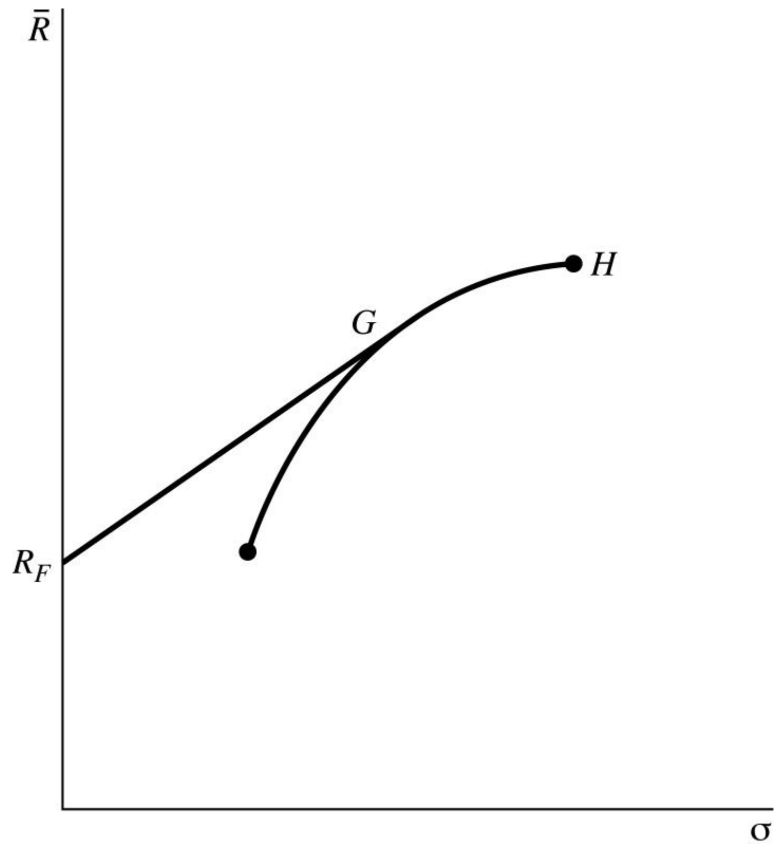


FIGURE 5-15 The efficient frontier with lending but not borrowing at the riskless rate.

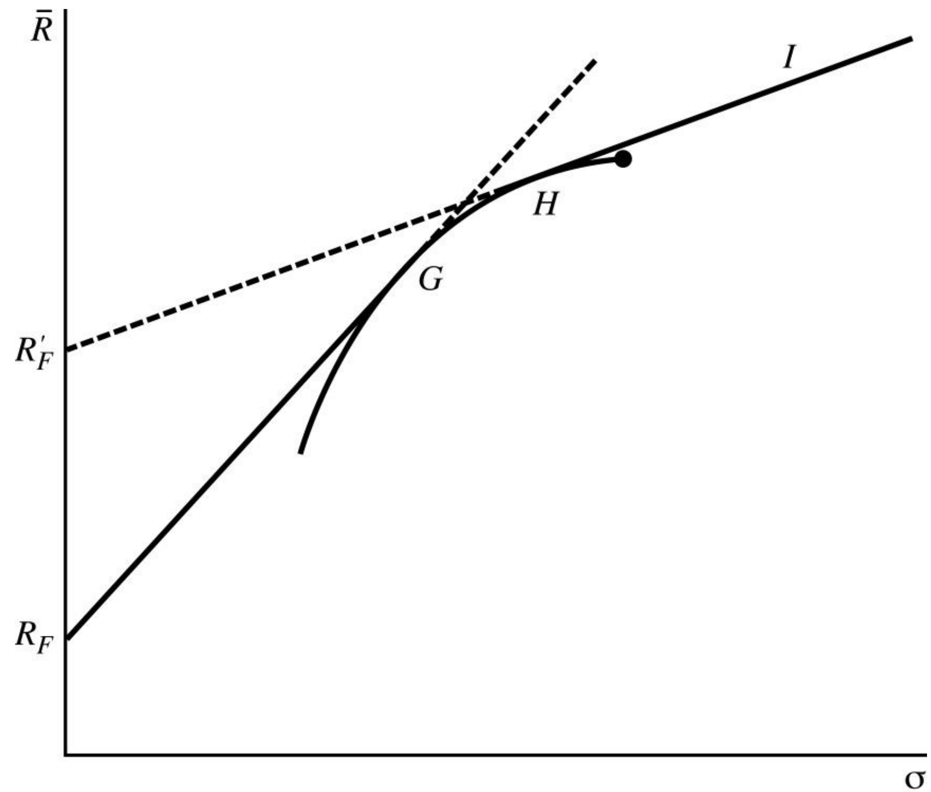


FIGURE 5-16 The efficient frontier with riskless lending and borrowing at different rates.

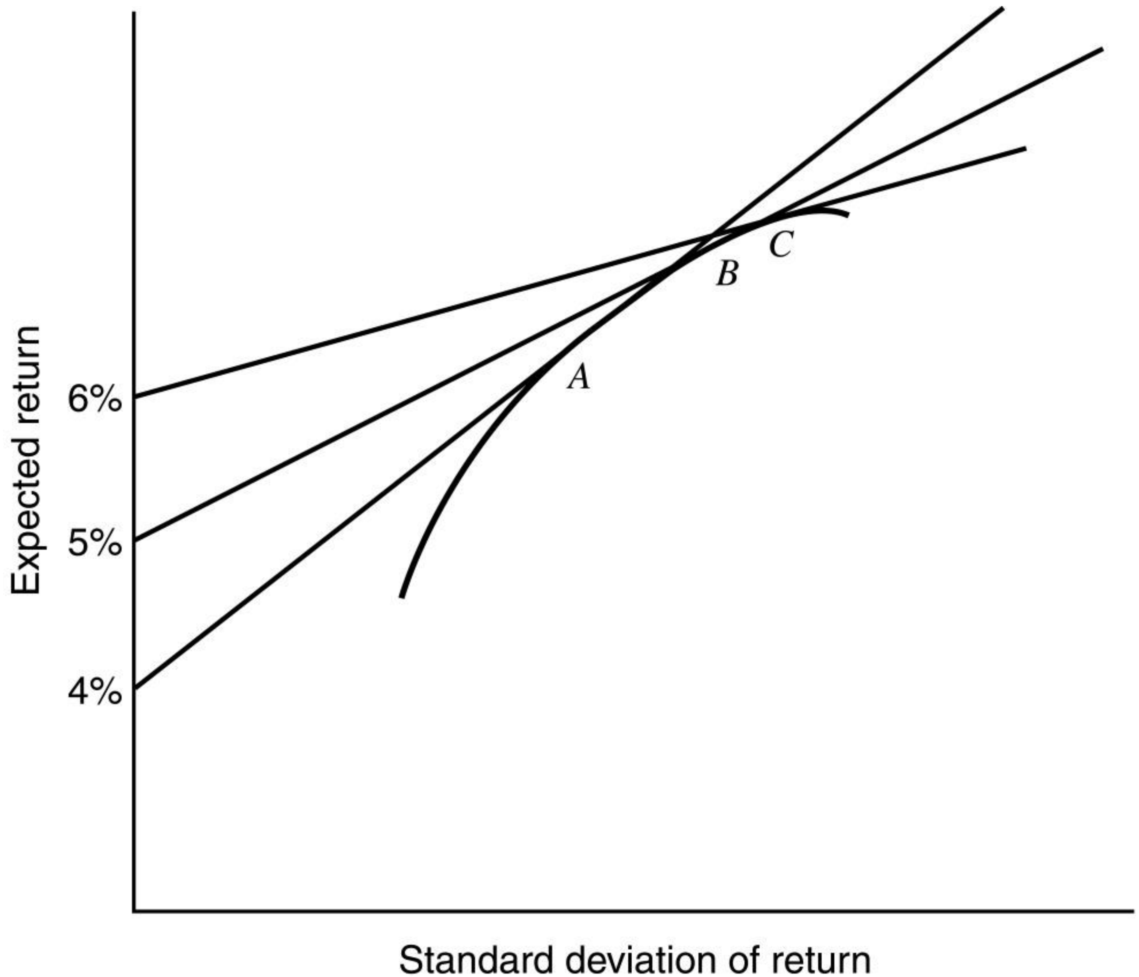


FIGURE 6-3 Tangency portfolios for different riskless rates.

	S&P	Bonds	Canadian	Japan	Emerging Market	Pacific	Europe	Small Stock
Expected return	14.00	6.50	11.00	14.00	16.00	18.00	12.00	17.00
Standard deviation	18.50	5.00	16.00	23.00	30.00	26.00	20.00	24.00
			Correlation Coefficients					
S&P	1.00	0.45	0.70	0.20	0.64	0.30	0.61	0.79
Bonds		1.00	0.27	−0.01	0.41	0.01	0.13	0.28
Canadian			1.00	0.14	0.51	0.29	0.48	0.59
Japan				1.00	0.25	0.73	0.56	0.13
Emerging Market					1.00	0.28	0.61	0.75
Pacific						1.00	0.54	0.16
Europe							1.00	0.44
Small stock								1.00

Table 6-1 Input Data for Asset Allocation

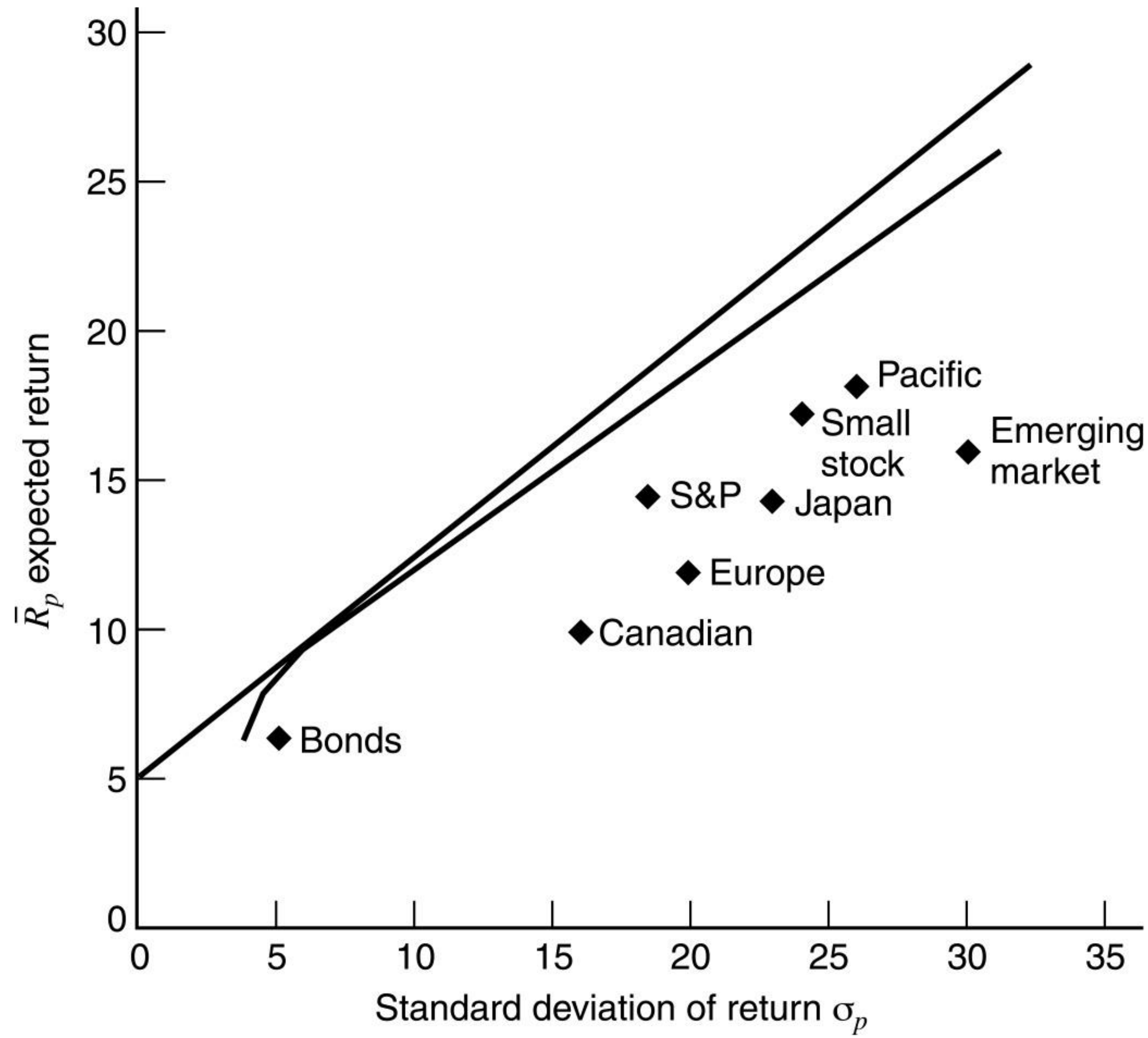


FIGURE 6-4 The efficient frontier with riskless lending and borrowing and short sales allowed.

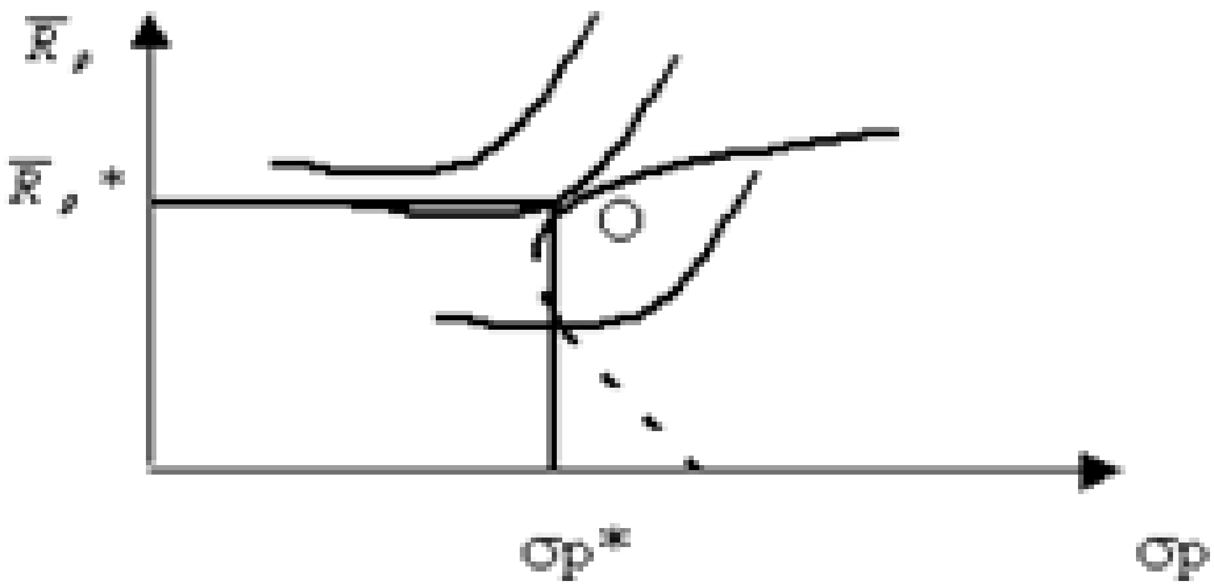
6. A carteira ótima

Carteira óptima (O): carteira que, dadas as condições do mercado e as preferências do agente, maximiza o seu nível de satisfação (maximiza a sua utilidade esperada); ponto de tangência entre a fronteira eficiente e a mais elevada curva de indiferença.

Para determinar este ponto é condição necessária igualar a inclinação da fronteira eficiente à inclinação da curva de indiferença:

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \overline{R_p}}(\text{fronteira eficiente}) = \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \overline{R_p}}(\text{curva de indiferença})$$

A igualdade da equação anterior, entre a taxa marginal de transformação e a taxa marginal de substituição, pode ser ilustrada através da seguinte Figura:



O critério média variância

- O teorema da utilidade esperada requer a comparação e ordenação da utilidade esperada de todos os projectos, os quais podem ser em elevado número e ter funções distribuição complexas, para escolher o que dá origem à utilidade esperada máxima.
- É assim habitual impor **restrições** suplementares que permitam tornar o critério da utilidade esperada noutro mais facilmente utilizável.

Transformação do critério utilidade esperada num critério média-variância

Restrições:

- a distribuição dos rendimentos dos projetos possíveis segue uma lei (distribuição) normal;
- a função utilidade do investidor é quadrática.

- Caso se admita que a distribuição de probabilidade dos rendimentos segue uma distribuição normal, o investidor pode escolher o projecto apenas com base numa análise do rendimento esperado e do desvio padrão (esta distribuição tem um limite inferior, isto é, o rendimento não pode ser inferior a -100%).
- A segunda condição garante igualmente que a escolha assenta apenas na consideração da média e do desvio padrão.

Curvas de indiferença

As curvas de indiferença ou isoquantas são curvas que unem pontos com igual nível de utilidade.

Seja a seguinte função utilidade quadrática

$$U(W) = aW - bW^2$$

Calcula-se o valor esperado da utilidade

$$E[U(W)] = E[aW] - E[bW^2]$$

$$E[U(W)] = aE[W] - bE[W^2]$$

Dado $E[W^2] = E(W)^2 + \sigma_W^2$

Temos $E[U(W)] = aE[W] - bE[W]^2 - b\sigma_W^2$

Fazendo $$E[U(W)] = K$$

E resolvendo em ordem a σ_W^2

Vem

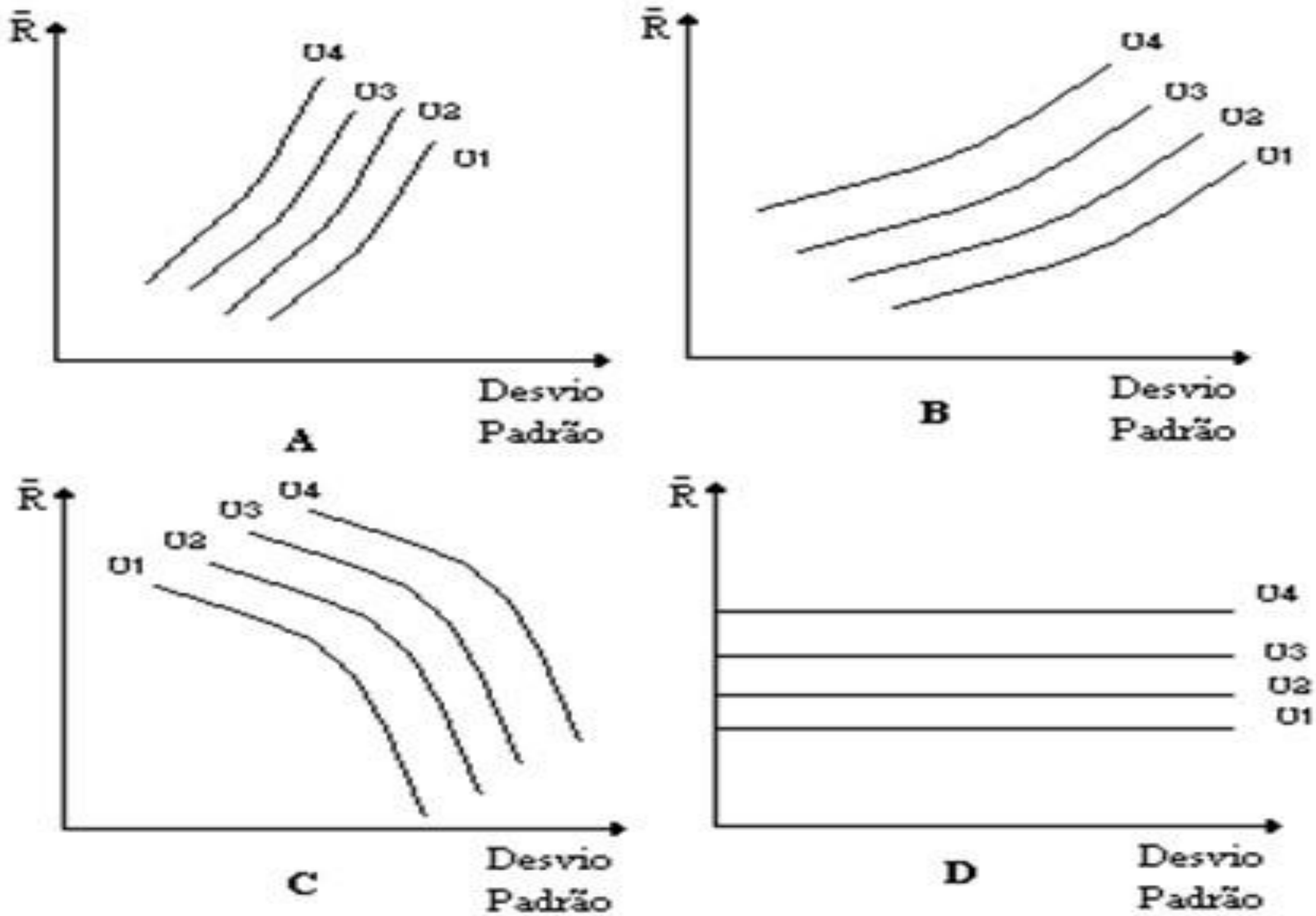
$$\sigma_W^2 = -\frac{K}{b} + \frac{a}{b}\overline{W} - (\overline{W})^2$$

- Dado que a riqueza final depende da taxa de rendimento, então é possível escrever/representar as curvas de indiferença no espaço da taxa de rendimento esperada e da variância da carteira (parábola voltada para baixo, com um maximizante em $\overline{R}_p = \frac{a^*}{2b^*}$):

$$\sigma_p^2 = -\frac{K}{b^*} + \frac{a^*}{b^*}\overline{R}_p - (\overline{R}_p)^2$$

- No espaço do desvio-padrão e da taxa de rendimento esperada as curvas são representadas por linhas convexas com declive positivo.

Curvas de Indiferença em $(\sigma_p, \bar{R}_p)$



- A - Investidores avessos ao risco com um elevado grau de aversão
- B - Investidores avessos ao risco mas com um menor grau de aversão
- C - Investidores amantes do risco
- D - Investidores indiferentes em relação ao risco

Curvas de indiferença cuja inclinação é positiva indicam que os investidores apenas estão dispostos a aceitar mais risco se isso representar uma maior taxa de rendimento esperada.